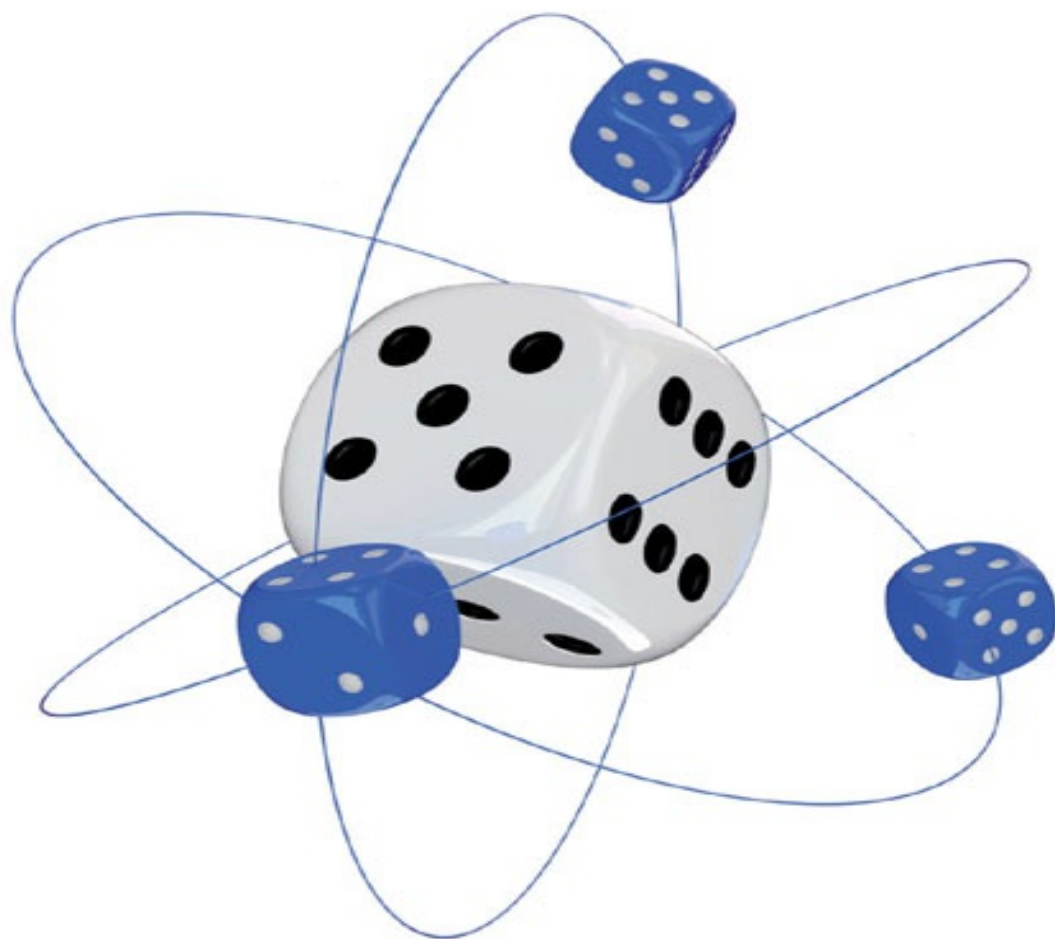


Giorgio Chinnici

Guarda caso

**I meccanismi segreti
del mondo quantistico**



MiCROSCOPI

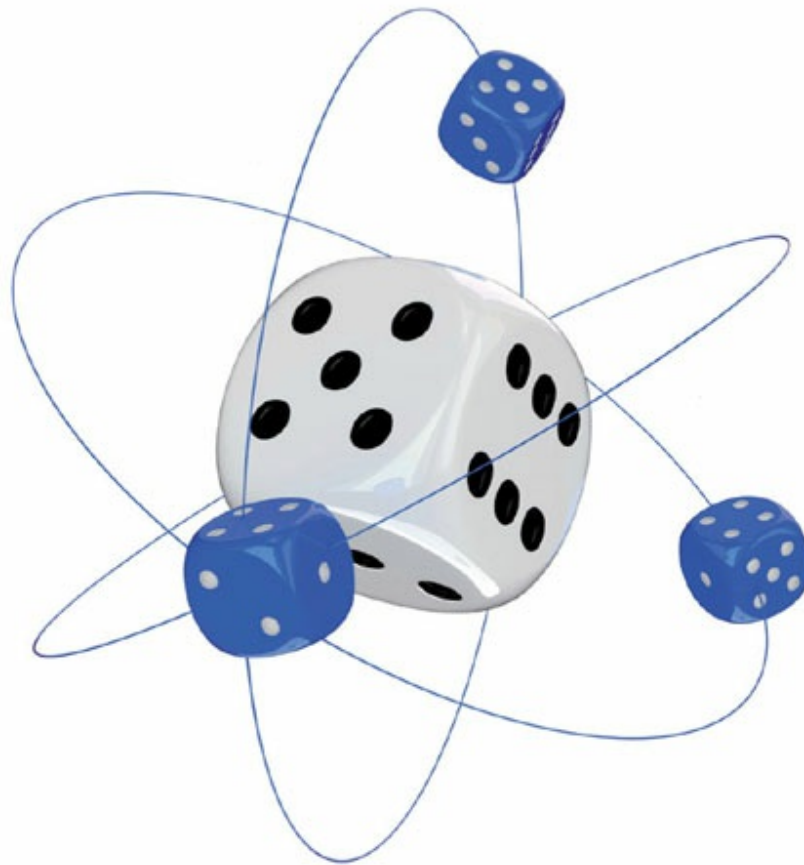


HOEPLI

Giorgio Chinnici

Guarda caso

**I meccanismi segreti
del mondo quantistico**



MICROSCOPI



HOEPLI



MiCROSCOPI

MiCROSCOPI

Collana diretta da Massimo Temporelli

Che cosa fa la scienza? Che limiti ha la tecnologia? Come stanno cambiando la società e il nostro mondo?... La collana *Microscopi* prova a rispondere a queste e altre domande in modo brillante e non accademico.

Un taglio agile e disincantato, un linguaggio alla portata di tutti, autori giovani e vicini al mondo della ricerca: ecco i tratti salienti di una collana per informarsi in modo veloce ed efficace sui principali argomenti della scienza e della tecnologia. Quelli che stanno sempre di più cambiando la nostra vita.

I titoli della collana *Microscopi* si articolano in diversi filoni legati ai temi della divulgazione scientifica, delle frontiere tecnologiche e delle sue applicazioni, delle biografie di scienziati, inventori e movimenti, delle idee e delle scoperte che hanno segnato la storia dell'umanità.

Giorgio Chinnici

Guarda caso

I meccanismi segreti del mondo quantistico



EDITORE ULRICO HOEPLI MILANO

Copyright © Ulrico Hoepli Editore S.p.A. 2017

via Hoepli 5, 20121 Milano (Italy)

tel. +39 02 864871 – fax +39 02 8052886

e-mail hoepli@hoepli.it

www.hoepli.it

Seguici su Twitter: @Hoepli_1870

Tutti i diritti sono riservati a norma di legge
e a norma delle convenzioni internazionali

ISBN EBOOK 978-88-203-8011-3

Progetto editoriale e realizzazione: Maurizio Vedovati – Servizi editoriali
(info@iltrio.it)

Copertina: Sara Taglialegne

Realizzazione digitale: Promedia, Torino

SOMMARIO

Introduzione

Capitolo 1

Casualità

Capitolo 2

Quantizzazione

Capitolo 3

Sovrapposizione

Capitolo 4

Evoluzione

Capitolo 5

Indeterminazione

Capitolo 6

Indistinguibilità

Capitolo 7

Entanglement

Capitolo 8

Misura

Informazioni sul libro

Circa l'autore

Tutte le citazioni presenti nel testo sono traduzioni dell'autore. Tutte le figure di cui non viene citata la fonte sono realizzazioni dell'autore.

INTRODUZIONE

Certi se ne stanno lì seduti davanti a dei pezzi di carta rigata, segnano tutti i colpi, li contano, ne deducono le probabilità, fanno i loro calcoli e alla fine puntano e perdono proprio come noi, semplici mortali che giochiamo senza calcolare niente.

Fëdor Dostoevskij, *Il giocatore* (1866)

A partire dall'inizio del XX secolo divenne chiara l'esistenza di fenomeni fisici e comportamenti della natura che presentavano caratteristiche radicalmente diverse da quelle conosciute fino a quel momento. Erano del tutto inspiegabili secondo le teorie fisiche classiche, tanto da imporre una radicale revisione delle nostre concezioni sul mondo.

E non si trattava certo di fenomeni esoterici o marginali: ciò a cui la scienza dell'epoca per la prima volta si accostava non era nulla di meno che la struttura ultima della materia e della radiazione. Per la prima volta si riuscì a esaminare sperimentalmente il comportamento degli atomi e di particelle ancora più piccole come gli elettroni. Quello che i ricercatori trovarono diede il via allo sviluppo di una nuova teoria fisica: la meccanica quantistica; e con essa, a una ridda di interrogativi filosofici.

Cos'è la meccanica quantistica? E perché serve una nuova teoria?

Per spiegarlo partiamo da questa considerazione: i valori che si ottengono misurando le grandezze fisiche associate agli oggetti su scala atomica e subatomica sono in generale *casuali*, e distribuiti secondo una ben precisa legge di *probabilità*.

Se per esempio misuriamo la posizione di un elettrone in fissate condizioni sperimentali, otteniamo ogni volta risultati diversi anziché sempre uno stesso ben determinato valore, come ci si aspetterebbe.

Che cos'è quindi la meccanica quantistica? È la teoria che ci occorre per descrivere questo comportamento casuale della natura a livello microscopico. Una teoria altamente sviluppata e raffinata, le cui conferme sperimentali sono straordinariamente precise. Una teoria che è in grado di prevedere qualitativamente e quantitativamente, e di inserire in un'unica cornice concettuale, non solo il comportamento probabilistico ma anche tutte le altre sorprendenti e rivoluzionarie caratteristiche dei fenomeni microscopici, indissolubilmente legate alla casualità.

Innanzitutto, consideriamo la *quantizzazione*, che storicamente ha dato il nome alla nuova teoria. Grandezze fisiche come l'energia, in assegnate circostanze, non assumono con continuità tutti i valori possibili, ma solo dei valori discreti, "saltando" dall'uno all'altro: è il caso dell'energia dell'atomo.

La *sovrapposizione* degli stati di una particella fa sì che diverse possibili alternative

interferiscano tra di loro; questo fenomeno, nelle parole di Richard Feynman, ha dentro di sé il cuore della meccanica quantistica, anzi contiene il suo unico mistero. E rappresenta il principale motivo per cui in meccanica quantistica è imprescindibile l'impiego dei *numeri complessi*.

Un'altra caratteristica è l'*indeterminazione*. Le grandezze fisiche si possono considerare a coppie (posizione e momento, per esempio): se si fa in modo che la dispersione dei valori casuali misurati per una di esse sia piccola (grandezza determinata), necessariamente la dispersione casuale per l'altra sarà ampia (grandezza indeterminata).

L'*entanglement* poi è la correlazione quantistica tra due particelle spazialmente separate, che produce effetti non locali (il celebre paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen). La violazione della disuguaglianza di Bell, provata dagli esperimenti di Aspect, dimostra che l'*entanglement* è una reale caratteristica della natura.

Vedremo inoltre che il comportamento probabilistico si può intendere anche come manifestazione di un principio fondamentale, quello della *indistinguibilità* tra particelle elementari della stessa specie.

In quanto teoria basata sulla probabilità, l'atto della *misura* riveste un'importanza particolare. Eseguendo infatti la misura di una grandezza fisica si trova esattamente uno dei possibili valori per i quali fino a quel momento disponiamo solo di una probabilità che si verifichino. Il problema della misura apre una questione concettuale centrale e dà adito a diverse interpretazioni.

La meccanica quantistica ispira profonda curiosità, voglia di conoscere e di capire. E tuttavia è avvolta da una sorta di aura di mistero, quasi di sapienza iniziatica, quando non addirittura di falso misticismo: c'è infatti anche chi usa il termine "quantistico" del tutto a sproposito e senza alcun fondamento scientifico.

Si tratta di un argomento affascinante ma certamente non banale, anche se il significato della meccanica quantistica può essere compreso da chiunque. E questo rappresenta, a mio parere, una componente culturale imprescindibile, come vale per la scienza in generale, e in particolare per quei campi più distanti dal senso comune e che proprio per questo tanto hanno da proporre sul piano filosofico. È il caso appunto della meccanica quantistica, così come dell'altra grande teoria fisica dell'inizio del Novecento, la teoria della relatività. Se la relatività rivoluziona i concetti di spazio e tempo, la meccanica quantistica ci fa riflettere su concetti come esistenza e individualità, località e persistenza nel tempo, causa ed effetto, e in ultima analisi sul significato stesso di realtà.

Il volume che state per leggere ambisce a un'esposizione concettuale chiara della meccanica quantistica, della sua struttura, dei suoi fondamenti e della sua interpretazione. Si propone di chiarire il suo significato, evidenziando inoltre anche alcune erronee convinzioni a riguardo e fornendo degli spunti di riflessione.

L'esposizione procede in maniera nuova, concettualmente più adeguata e

didatticamente più efficace per un pubblico di non specialisti. Il libro si rivolge pertanto sia a chi ha già avuto a che fare con la meccanica quantistica – nel corso dei propri studi o dalla letteratura divulgativa – sia a chi non ne sa nulla e vuole investire il proprio interesse per scoprire di che cosa si tratta.

In un mio precedente testo divulgativo sulla teoria della relatività (*Assoluto e relativo. La relatività da Galilei ad Einstein e oltre*, Hoepli 2015) ho seguito nell'esposizione un approccio storico, che in quel caso mi è sembrato il migliore dal punto di vista didattico per illustrare le motivazioni e la genesi della teoria. Benché nel presente volume la meccanica quantistica venga inquadrata anche in un contesto storico e culturale, nell'esposizione tuttavia non seguo cronologicamente lo sviluppo storico della disciplina. Sono convinto infatti che un tale approccio (usato peraltro da molti libri di testo tradizionali) non sia quello più adatto in questo caso, e che anzi possa risultare persino fuorviante.

Ci limitiamo naturalmente alla meccanica quantistica non relativistica; restiamo cioè nell'ambito di quei fenomeni nei quali le velocità in gioco sono basse rispetto alla velocità della luce.

La conoscenze matematiche e scientifiche che questo libro presuppone sono quelle della scuola superiore. Il formalismo matematico della meccanica quantistica è in effetti formidabile, ma io qui uso solo delle semplici formule alla portata di chiunque. Queste però sono necessarie per capire di che cosa si sta parlando, e non bisogna perciò ritrarsi davanti a loro, tanto più che molto spesso un simbolo risulta più chiaro ed efficace di cento parole. A ogni modo, i pochi paragrafi con maggiore contenuto matematico sono posti all'interno dei box e possono essere omessi a una prima lettura.

Capitolo 1

CASUALITÀ

Il determinismo

Indubbiamente la scoperta di un comportamento casuale della natura è sorprendente, se non addirittura sconvolgente, poiché questo comportamento contraddice totalmente ciò che avviene per gli oggetti macroscopici nella quotidiana esperienza del mondo.

Secondo la fisica classica, infatti, il comportamento di un qualsiasi sistema fisico è *deterministico*. Il significato di questo termine è il seguente:

- Supponiamo di preparare un sistema fisico sempre nella stessa precisa maniera, di farlo cioè partire da un assegnato stato.
- Il sistema si evolve poi sotto l'influsso del medesimo ambiente.
- Allora, misurando nelle stesse condizioni sperimentali una qualunque grandezza fisica del sistema, otterremo sempre lo stesso valore.

A questo comportamento deterministico della natura la meccanica classica fa corrispondere una teoria quantitativa che si serve di un modello matematico basato sul concetto di stato.

Vediamo che cosa si intende prendendo in considerazione il sistema fisico più semplice possibile, il punto materiale o particella materiale. Si tratta di un modello applicabile sia macroscopicamente (la Terra si può modellizzare come un punto rispetto all'intero Sistema Solare se ci interessa studiare la sua orbita attorno al Sole e non la sua rotazione attorno al proprio asse) sia microscopicamente (l'elettrone è in effetti una particella puntiforme).

Una particella materiale possiede da una parte delle grandezze fisiche intrinseche, invariabili, quali la massa m e la carica elettrica Q , le quali definiscono l'identità della particella stessa. D'altra parte, la particella può trovarsi in diversi punti dello spazio: un elettrone rimane un elettrone, ma è caratterizzato da una diversa condizione fisica. La particella materiale possiede cioè anche delle grandezze fisiche dinamiche, le quali possono variare nel tempo, come: posizione, velocità, momento lineare, momento angolare orbitale, energia potenziale, energia cinetica. Queste grandezze evidentemente identificano e caratterizzano a ogni istante le condizioni fisiche in cui il sistema si trova,

il suo stato, appunto. Le grandezze intrinseche devono essere note a priori, dopodiché la caratterizzazione fisica della particella stessa a ogni istante (dove si trova, con quale velocità si sta muovendo, che energia possiede ecc.) è data dall'insieme delle grandezze fisiche dinamiche a essa associate.

Si verifica però che dalle sole grandezze posizione e velocità è possibile dedurre tutte le altre grandezze meccaniche dinamiche, le quali infatti sono definibili in termini di queste due. Per esempio: il momento lineare \mathbf{p} , o quantità di moto, è un vettore definito da $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; l'energia cinetica E_k è una grandezza scalare data da $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ (\mathbf{v} è il vettore velocità e v il suo modulo).

Si noti per inciso che parlare di velocità o di momento è in sostanza equivalente, essendo le due grandezze proporzionali attraverso la massa, la quale è fissata; tuttavia in molte circostanze è più corretto o opportuno far riferimento al momento, e questo è il caso della meccanica quantistica. In quanto segue useremo entrambe le grandezze, e talvolta in maniera intercambiabile.

La posizione e la velocità (ovvero la posizione e il momento) assumono pertanto un ruolo privilegiato, essendo sufficienti a caratterizzare completamente la particella dal punto di vista fisico dinamico. In parole quotidiane, la particella è caratterizzata dinamicamente se si sa dov'è (posizione) e dove sta andando (velocità o momento).

Lo stato è un concetto matematico (una coppia di funzioni del tempo) che rispecchia direttamente un concetto fisico (le condizioni dinamiche in cui la particella fisicamente si trova in ogni istante).

Il modello è allora costruito in questo modo:

- Si considera noto lo stato iniziale del sistema, rappresentato dalla sua posizione e dalla sua velocità iniziali (chiamate anche condizioni iniziali).
- L'evoluzione del sistema è governata dalla legge della dinamica di Newton, che dice come cambia lo stato del sistema a causa delle forze agenti su di esso; la legge dinamica porta lo stato iniziale in uno stato finale.
- Dallo stato finale possiamo ricavare posizione, velocità (direttamente) e ogni altra grandezza (mediante semplici formule).

In pratica, la legge dinamica funziona in questo modo: una volta inserita l'espressione della forza esterna si ottiene un'equazione risolvendo la quale, a partire dalle condizioni iniziali, si ricavano posizione e velocità per ogni istante di tempo.

Va osservato che gli elementi che compongono il modello matematico della teoria non si possono dedurre da altri principi: di fatto quindi hanno il rango di postulati, e la loro giustificazione ultima consiste nel perfetto accordo tra la teoria e l'esperimento.

Si noti inoltre che il tempo t non appartiene a nessuna delle due categorie di cui abbiamo parlato: non è una grandezza dinamica né tanto meno una grandezza intrinseca associata a un particolare sistema fisico. Piuttosto, il tempo assume il ruolo di parametro

che etichetta i successivi stadi di un'evoluzione.

Per un sistema fisico costituito da più particelle puntiformi, semplicemente prendiamo in considerazione le grandezze posizione e velocità per ciascuna di esse, fianco a fianco.

Quando il modello di particella puntiforme non è adeguato per quello che ci interessa studiare, si prendono in considerazione dei modelli fisici classici che tengono conto del fatto che il sistema fisico in esame ha un'estensione e dunque una *struttura interna*. In tali casi, le grandezze posizione e velocità possono essere quelle del centro di massa del sistema, ma per caratterizzare in maniera completa lo stato del sistema fisico esteso occorrono altre grandezze fisiche dinamiche oltre a queste due (naturalmente, anche le grandezze intrinseche aumentano di numero). La Terra, per esempio, può essere modellizzata come una sfera rigida; il suo stato viene allora caratterizzato in maniera completa da tre grandezze fisiche dinamiche: posizione e velocità del centro di massa (le quali descrivono il moto orbitale della Terra intorno al Sole), con in più la velocità angolare ω . Si tratta di un vettore la cui direzione è quella dell'asse di rotazione della sfera su se stessa e il cui modulo esprime il numero di giri nell'unità di tempo. Possiamo allora decidere di studiare il sistema completo (modello con tre variabili vettoriali di stato), oppure solo il moto del centro di massa (modello con due variabili di stato), oppure anche solo la rotazione propria (modello con una variabile di stato).

Un esperimento della fisica classica

Detto questo, per vedere in maniera concreta come funziona il determinismo della fisica classica consideriamo un oggetto macroscopico come una palla da tennis, che modellizziamo come un punto materiale. Ci concentriamo cioè sulle grandezze fisiche posizione e velocità della palla (ossia, per essere esatti, del suo centro di massa), in quanto ci interessa studiare la traiettoria della palla stessa dopo un lancio.

Vogliamo eseguire un esperimento di misura della posizione della palla in condizioni controllate, ossia appunto conoscendo lo stato iniziale della palla quando parte e le interazioni a cui è sottoposta dall'ambiente in cui si trova. Avremo così la possibilità di ripetere l'esperimento nelle stesse condizioni; la ripetibilità, infatti, è evidentemente essenziale per usare l'esperimento così da verificare la teoria.

Ovviamente, il comportamento della natura è del tutto indipendente dagli esperimenti che noi eseguiamo; tuttavia, l'esperimento è un fondamentale strumento a disposizione degli esseri umani per ottenere risposte alle loro domande.

Supponiamo dunque che a un istante iniziale t_0 la palla, di assegnata massa m , venga lanciata in un modo preciso, venga cioè preparata in uno stato assegnato, il quale come già sappiamo è costituito dalla sua posizione $x = y = 0$ e dalla sua velocità v_0 (in

direzione e modulo). Lo stato della palla, la sua posizione e la sua velocità, si evolve nel tempo sotto l'influsso della gravità terrestre: la palla esegue cioè la tipica traiettoria a parabola su un piano verticale, come nella [figura 1.1](#).

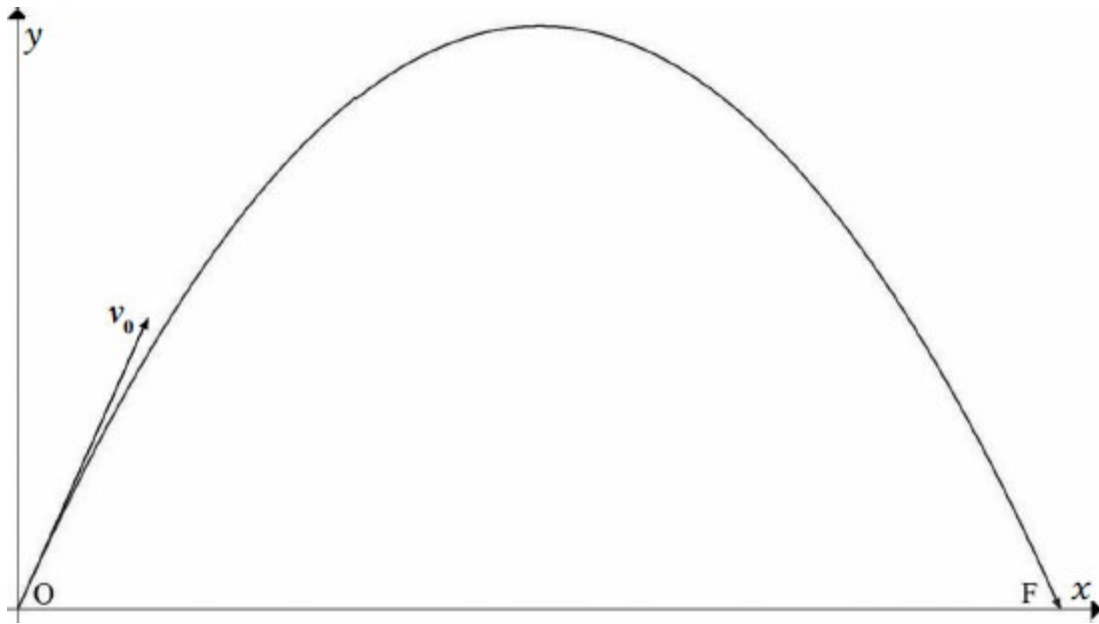


Figura 1.1 – La traiettoria deterministica di un oggetto macroscopico.

Possiamo misurare la posizione in un punto qualunque della traiettoria: otterremo un preciso valore che coincide con quello calcolato usando la legge della dinamica di Newton. In particolare, pensiamo al piano della superficie terrestre come a un apparato di misura della posizione x della palla per $y = 0$, dopo il lancio. Si trova che la posizione finale F in cui la palla cade a terra è, per esempio, a $x = 4$ m dal punto di lancio O .

Ma il fatto importante è che questo esperimento è *ripetibile* ottenendo ogni volta esattamente lo *stesso* risultato. Prendiamo infatti un gran numero di palle da tennis:

- Prepariamo ognuna di esse nello stesso modo, il che nell'esempio in esame vuol dire imprimere la stessa velocità iniziale v_0 a partire da un punto di lancio preso come riferimento.
- Ognuna di esse subirà poi la medesima evoluzione temporale, percorrerà cioè la stessa traiettoria parabolica negli stessi tempi.
- Quando la palla ricade a terra misuriamo la sua posizione sull'asse x di ognuna di esse, ottenendo sempre il valore 4 m.

Tutto ciò appare talmente naturale che sembra persino superfluo metterlo esplicitamente in evidenza.

Una nuova teoria

Le cose tuttavia non sono affatto così semplici se invece eseguiamo un esperimento con particelle subatomiche come elettroni e neutroni, ma gli stessi fenomeni si evidenziano utilizzando atomi e persino molecole complesse. Al momento non prendiamo in considerazione nessuna teoria e nessun modello matematico, bensì ci limitiamo a eseguire un esperimento fisico che si conclude con una misura.

Nella sua struttura concettuale, un tale tipo di esperimento è logicamente organizzato nella stessa maniera di prima:

- Sottoponiamo un neutrone a un'assegnata e ripetibile procedura fisica di preparazione.
- Lo lasciamolo evolvere in condizioni note.
- Misuriamo la sua posizione in circostanze fissate.

Otterremo un ben preciso valore.

Adesso però ripetiamo questo stesso identico esperimento su un insieme di neutroni, uno alla volta: per ognuno di essi stessa preparazione, stessa evoluzione, stessa misura. E tuttavia otteniamo ogni volta risultati diversi!

L'esperimento in sé, come nel caso macroscopico, è ripetibile sotto identiche condizioni; ma a differenza del caso macroscopico ciò non conduce a ottenere lo stesso risultato. I valori di posizione che si ottengono sono distribuiti in maniera casuale. Se trasversalmente alla direzione lungo la quale il neutrone si propaga frapponiamo un piano con superficie appositamente trattata, otterremo un puntino annerito, segno dell'impatto della particella contro il piano, in posizione sempre diversa.

Un risultato assolutamente inspiegabile secondo la fisica classica.

Facciamo un esempio concreto: l'esperimento realizzato da Anton Zeilinger dell'Università di Innsbruck e dai suoi collaboratori presso l'Istituto Laue-Langevin a Grenoble negli anni '80, schematizzato nella [figura 1.2](#).

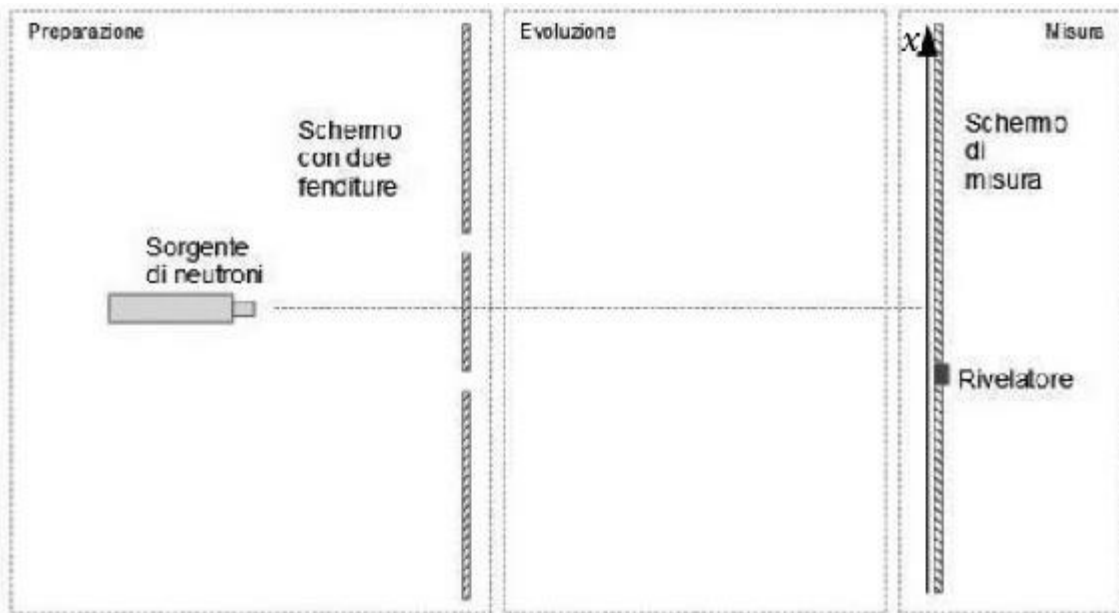


Figura 1.2 – Esperimento con neutroni con due fenditure.

La preparazione consiste nell'ottenere, mediante una reazione nucleare, dei neutroni con un'opportuna energia e nel dirigerli, *uno alla volta*, verso uno schermo nel quale sono praticate due fenditure di dimensioni opportune. Ciascun neutrone dopo aver superato il primo schermo procede poi liberamente – senza essere sottoposto a interazioni esterne – fino a impattare su un secondo schermo, dove un rivelatore mobile può segnare il colpo. Il rivelatore viene posto successivamente in una serie prestabilita di punti sull'asse x e ogni volta un gran numero di neutroni vengono sparati verso lo schermo di misura.

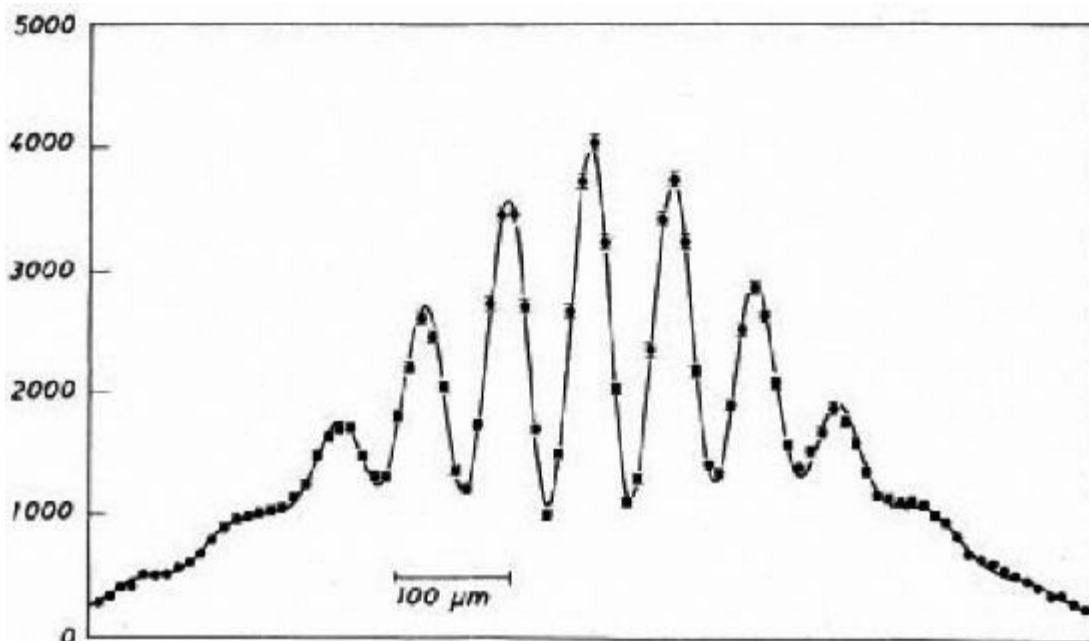


Figura 1.3 – Distribuzione dei neutroni nell'esperimento con due fenditure. *Fonte: A.*

Zeilinger, R. Gähler, C.G. Shull, W. Treimer, W. Mampe, “Single-and double-slit diffraction of neutrons”, *Reviews of Modern Physics*, 60, 1067 (1988).

Il risultato dell'esperimento si vede nella [figura 1.3](#): sull'asse orizzontale c'è la posizione x del rivelatore, su quello verticale il numero di neutroni rivelato. I pallini neri rappresentano i punti di impatto rivelati sperimentalmente e mostrano molto chiaramente che i neutroni si distribuiscono secondo una curva continua, quella che nel grafico raccorda i punti sperimentali.

Ogni volta che si ripete l'intero esperimento si ottiene sempre lo stesso andamento statistico, ma il punto d'impatto di ogni singolo neutrone rimane imprevedibile.

Questo fatto evidentemente crea una profonda frattura rispetto alla fisica classica, ma c'è di più: come vedremo nel capitolo *Sovrapposizione*, non è compatibile con la visione classica del mondo neppure lo stesso andamento statistico – formato da un'alternanza di massimi e minimi – che si vede nella [figura 1.3](#).

A questo punto, poiché il comportamento fisico negli esperimenti descritti è ben diverso rispetto al caso macroscopico, evidentemente non possiamo associargli la stessa teoria deterministica, lo stesso modello matematico che usiamo in fisica classica. La meccanica newtoniana non ci è più di alcun aiuto.

Intanto, non possiamo più parlare di una traiettoria definita se ogni punto di un supposto percorso non è fissato, ma cambia in maniera casuale. Non è più vero che la posizione e la velocità di una particella sono univocamente determinate a ogni istante; piuttosto, esse possono in generale assumere a ogni istante diversi valori, ognuno con una certa probabilità, e solo l'atto della misura rileva l'uno o l'altro di questi valori. Di conseguenza, non possiamo più neanche modellizzare lo stato di un punto materiale mediante la sua posizione e la sua velocità.

Per quanto riguarda la posizione, tutto quello che possiamo dire è che l'entità fisica si propaga sotto assegnate condizioni, e che abbiamo una certa probabilità di trovare questa entità in ciascun punto spaziale come risultato di una misura. Quello che possiamo fare allora è segnare tutti i colpi, catalogare tutti i punti di impatto degli elettroni allorché l'esperimento viene eseguito un numero n di volte, con n molto grande.

È la stessa cosa che si fa per esempio con il lancio di una moneta oppure di un dado; in questi casi tanto più è grande il numero di lanci n , tanto più il risultato ottenuto si avvicina a un valore atteso teorico, che è dato da: probabilità $\frac{1}{2}$ per le due facce della moneta, oppure probabilità $\frac{1}{6}$ per ognuna delle sei facce del dado. Il risultato del singolo lancio è del tutto casuale, ma la frequenza di ogni risultato in una lunga serie di ripetizioni dell'esperimento è fissata.

Ripetendo parecchie volte l'esperimento di misura della posizione di una particella, sempre nelle stesse condizioni, otteniamo una precisa distribuzione di probabilità: a ogni possibile risultato corrisponde una data probabilità. In certi punti andranno a finire più particelle, in altri meno, ma la percentuale che va a finire in ogni punto è fissata.

Quanto detto rimarca la necessità di questa nuova teoria completamente diversa, la meccanica quantistica, la quale rispecchi il comportamento casuale della natura e dunque fornisca una distribuzione di probabilità per la posizione.

Abbiamo usato la posizione per esemplificare, ma quanto detto vale per ogni grandezza fisica misurabile. Più in generale, quindi, la teoria deve essere in grado di fornire la distribuzione di probabilità con cui all'atto della misura si presentano i possibili risultati di *tutte* le grandezze fisiche dinamiche (dette anche *osservabili*) associate al sistema in esame.

Le grandezze intrinseche e il tempo, poi, assumono in meccanica quantistica lo stesso ruolo che avevano in meccanica newtoniana per la particella materiale.

Anche se i singoli risultati di identici esperimenti sono distribuiti in maniera casuale, tuttavia esiste una regolarità anche nella casualità. Certamente, il determinismo della fisica classica è perduto. La regolarità che cerchiamo nella natura, e che costituisce l'indispensabile presupposto per poter fare scienza e tecnica, viene però in certa misura recuperata, in quanto viene trasferita da quello stretto determinismo alla distribuzione di probabilità. In ambito classico, ogni volta che ripetiamo un singolo esperimento in condizioni fissate, in qualunque istante di tempo e in qualunque punto spaziale, otteniamo sempre lo stesso risultato. In ambito quantistico, invece, da questo punto di vista ciò che va preso in considerazione è una serie composta da un gran numero di esperimenti in condizioni fissate; ripetendo la serie di esperimenti, in qualunque istante di tempo e in qualunque punto spaziale, otteniamo la stessa distribuzione di probabilità dei risultati.

La probabilità quantistica ha origine nel mondo microscopico, ma i suoi effetti non sono certo confinati a esso, il *pattern* visibile a occhio nudo che si forma sullo schermo di misura ne è un esempio. Per farne un altro, celebre: poiché il decadimento di un atomo radioattivo avviene in un istante casuale, con una frequenza prevedibile, questo evento aleatorio potrebbe provocare o meno la rottura di una fiala di veleno, con conseguenze macroscopiche vistose.

Probabilità classica e informazione

Parlando del lancio di monete e dadi, al lettore attento non sarà sfuggito il fatto che la probabilità sembra dunque comparire anche nel reame dei fenomeni macroscopici. Ciò in realtà non contraddice affatto il rigido determinismo della fisica classica; vediamone il motivo.

Perché lanciando nello stesso modo la palla da tennis ottengo sempre la stessa traiettoria e lo stesso punto di impatto a terra, mentre lanciando un dado questo va a posizionarsi ogni volta con una diversa faccia rivolta verso l'alto? La risposta è molto semplice: perché il primo esperimento è controllabile, mentre il secondo non lo è.

Se ragioniamo in termini macroscopici classici, la natura, di suo, si comporta

sempre in maniera rigidamente deterministica. Sia la palla sia il dado nella loro corsa partono da condizioni iniziali e sono sottoposti a interazioni con l'ambiente che sono perfettamente determinate. Le leggi della meccanica classica newtoniana ci dicono allora che il risultato finale è anch'esso perfettamente determinato: la palla arriverà a terra in un punto preciso e il dado mostrerà una faccia precisa, che non possono che essere quelli stabiliti dalla preparazione e dalle interazioni che governano l'evoluzione temporale.

Il problema è semplicemente che in una ripetizione dell'esperimento lo stato iniziale e l'azione dell'ambiente durante l'evoluzione temporale non sono mai esattamente gli stessi. Per forza di cose, posizione e velocità iniziali dei vari punti della palla e del dado variano leggermente, poi i due corpi incontrano le molecole d'aria e di quant'altro presente nell'atmosfera in maniera non identica rispetto al lancio precedente.

Il punto è: quanto sono rilevanti in pratica queste differenze?

Nel caso della palla, piccole differenze portano comunque alla stessa posizione finale entro i limiti di precisione della misura. In linea di principio è possibile predisporre le condizioni iniziali con una precisione sempre maggiore, e questo conduce a una precisione sempre maggiore nella determinazione del punto di impatto della palla. Ciò corrisponde appunto al modello deterministico utilizzato per descrivere il fenomeno, la meccanica classica newtoniana.

Nel caso del dado, come risultato finale non prendiamo in considerazione il punto di impatto bensì la faccia che il dado mostra. Succede allora che lievi differenze nello stato iniziale e nell'azione dell'ambiente conducono ad avere una diversa faccia finale. Tuttavia la natura, secondo la fisica classica, è deterministica anche per il dado e, se noi avessimo la possibilità di conoscere quantitativamente e calcolare con infinita precisione tutte le variabili fisiche in gioco, potremmo prevedere con esattezza l'esito del lancio di un dado, con la stessa precisione con cui possiamo prevedere il punto di impatto della palla. Ma questo non ci è materialmente possibile, ed è solo per via di questa incapacità che non ci è di aiuto il modello della meccanica classica. Il comportamento fisico del dado è intrinsecamente deterministico, è dovuto a cause precise, ma siamo costretti a usare un modello probabilistico per descrivere quantitativamente i risultati degli esperimenti in gioco.

Come scrive Friedrich Schiller nella *Morte di Wallenstein*:

Il caso non esiste, e proprio ciò che ci appare come cieco accidente scaturisce dalle fonti più profonde.

La probabilità utilizzata in fisica classica è lo specchio non di un vero comportamento casuale, bensì semplicemente della mancanza di informazioni per noi umani. Si parla allora di probabilità epistemica, legata cioè appunto alla conoscenza che si ha del fenomeno. Solo la nostra incapacità di tener conto di tutte le variabili in gioco

ci porta a parlare di eventi casuali e a sviluppare per essi un modello probabilistico. Quello che sappiamo è che tutti i possibili insiemi di condizioni iniziali e di forze esterne si possono suddividere – di fatto equamente – in sei sottoinsiemi, ciascuno dei quali produce come risultato finale una delle sei facce del dado.

Dal punto di vista classico, la probabilità è un concetto che dipende molto semplicemente da quanta informazione *soggettiva* abbiamo su un determinato fenomeno, piuttosto che dal fenomeno oggettivo stesso.

Supponiamo di osservare un dado a sei facce posto su di una superficie: possiamo leggere senza problemi il numero presentato dalla sua faccia superiore, che chiamiamo il valore del dado, e sia esso, per esempio, 5. Banalmente, in questa circostanza l'informazione in nostro possesso è completa; abbiamo un dado che vale 5 e non abbiamo alcun bisogno del concetto di probabilità. Se proprio insistiamo nel voler estendere il modello probabilistico a comprendere anche questo caso, possiamo affermare che il valore 5 ha una probabilità pari a 1 e tutti gli altri hanno una probabilità pari a 0.

Per fare il caso opposto, ammettiamo ora che il dado sia coperto da un bussolotto. Non possiamo più leggerne il valore: sotto il bussolotto il dado vale comunque 5, ma noi non lo sappiamo e possiamo solo tirare a indovinare. Ognuna delle sei facce è allora per noi del tutto equivalente, per meglio dire equiprobabile; assegniamo perciò a ciascun valore del dado la probabilità $\frac{1}{6}$. Ovviamente, nessuno avanzerebbe dubbi sul fatto che il dado coperto abbia un valore ben preciso. Quando noi guardiamo sotto il bussolotto, quello che avviene non è un processo fisico che coinvolge il dado, bensì semplicemente un aggiornamento dell'informazione in nostro possesso. Come vedremo meglio in seguito, esattamente questo è invece il punto in cui la meccanica quantistica si discosta dal senso comune.

■ Distribuzioni discrete

Tra queste due situazioni estreme di informazione massima e nulla, possiamo immaginare delle situazioni nelle quali possediamo un'informazione parziale.

Immaginiamo per esempio di sapere che la persona che ha sistemato il dado sotto il bussolotto ha una predilezione per i numeri dispari. Chi ha preparato il dado, cioè, non lo disporrebbe cioè mai con un valore pari, mentre sceglierebbe con uguale frequenza uno dei valori dispari. In tal caso, riterremo che ognuno dei possibili valori dispari (1, 3, 5) sia equamente probabile, mentre i tre possibili valori pari (2, 4, 6) del dado siano impossibili. Il modello probabilistico che adottiamo in questo caso esemplificativo consiste allora nell'assegnare la probabilità $\frac{1}{3}$ a ciascuno dei valori dispari e la probabilità 0 a ciascuno dei valori pari.

Un'altra circostanza con informazione parziale è quando sappiamo che il dado è truccato: perché ne siamo a conoscenza a priori o perché abbiamo determinato sperimentalmente mediante molti lanci dello stesso dado che alcune facce compaiono più frequentemente di altre. Come nel caso precedente, dobbiamo allora assegnare probabilità diverse ai diversi valori del dado. Potrebbe darsi che in una serie di lanci il valore 6 si presenti con frequenza doppia rispetto agli altri, in conseguenza del fatto che la corrispondente faccia è stata opportunamente appesantita: assegniamo dunque a esso la probabilità $\frac{2}{7}$ e a tutti gli altri la probabilità $\frac{1}{7}$.

Si noti che in tutti i casi esaminati la somma delle probabilità

$$P(k), \text{ con } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

assegnate alle sei facce del dado vale 1, come dev'essere. Queste probabilità sono quelle che useremmo nello scommettere sul valore del dado.

Se lanciamo il dado un numero molto grande n di volte per mezzo del bussolotto, il k -esimo dei 6 possibili valori si presenterà all'incirca con una frequenza $P(k)$, quindi per esempio $\frac{1}{7}$ delle volte, oppure $\frac{2}{7}$ delle volte e così via a seconda dei casi. E in maniera tanto più precisa tanto più è grande n , circostanza che va sotto il nome di legge dei grandi numeri; dal punto di vista matematico la frequenza relativa del valore k -esimo è esattamente $P(k)$ quando il numero di lanci tende a infinito.

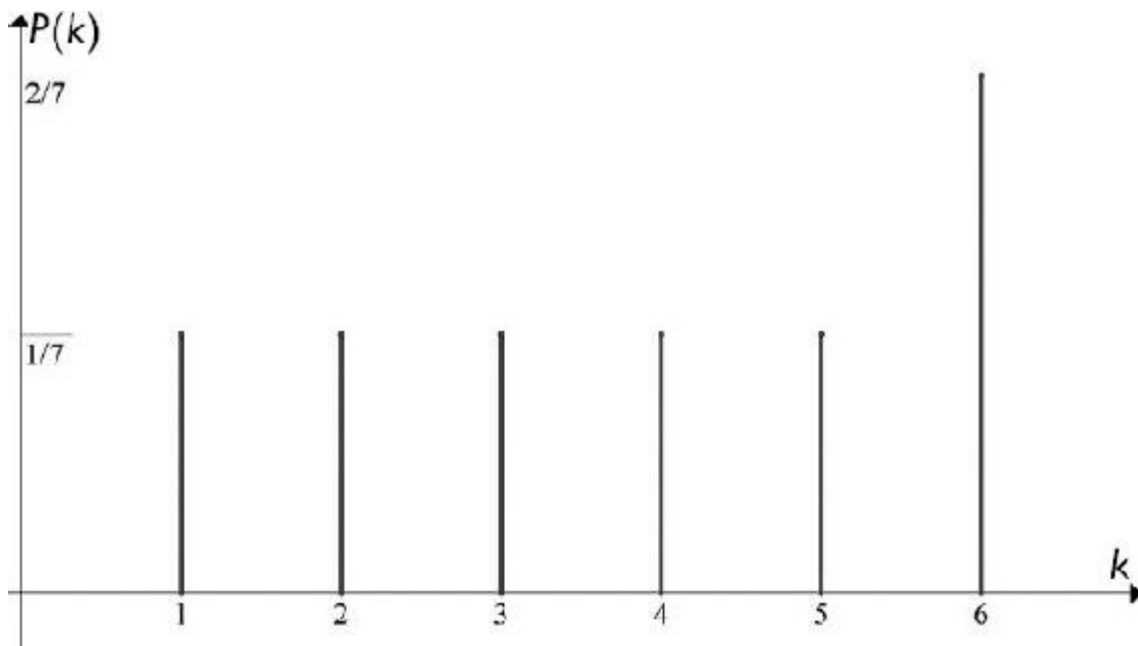


Figura 1.4 – Una possibile distribuzione di probabilità per un dado.

Anziché lanciare un dado n volte in sequenza, in modo equivalente possiamo anche lanciare n dadi contemporaneamente: le due maniere di procedere non si differenziano affatto per quanto riguarda la distribuzione di probabilità

associata all'esperimento.

Una volta che la $P(k)$ è assegnata, la si può utilizzare anche per calcolare la probabilità di ottenere, per esempio, uno qualunque dei tre valori $k = 2$ oppure $k = 3$ oppure $k = 6$. La probabilità complessiva è data semplicemente dalla somma dei singoli eventi componenti; la somma di tutte le $P(k)$ fornisce la probabilità totale, ossia come già osservato vale 1: che esca una qualunque delle possibili facce del dado è certo.

Il termine "distribuzione" bene illustra il fatto che si tratta appunto di una quantità totale distribuita su un insieme discreto di elementi. La distribuzione di probabilità presenta pertanto un'illuminante similarità con la distribuzione di una qualunque altra proprietà fisica tra elementi discreti, quale potrebbe essere un'assegnata carica elettrica totale distribuita tra particelle cariche oppure un'assegnata quantità di massa totale distribuita tra punti materiali discreti.

Immaginiamo per esempio di avere sei punti materiali, numerati da 1 a 6 e ognuno con una certa massa: la massa totale sarà la somma delle sei. Se ragioniamo in frazioni del totale, la massa totale può essere posta pari a 1, e può essere poi distribuita diversamente tra i sei punti materiali; esattamente come la probabilità complessiva 1 (certezza) può essere distribuita in maniera diversa tra le sei facce del dado. Il diagramma della [figura 1.4](#) può essere allora reinterpretato come indicante le masse frazionarie $M(k)$ dei sei punti materiali. Scegliamo alcuni dei sei punti: la massa complessiva è semplicemente la somma delle singole masse; la somma di tutte le $M(k)$ è la massa totale e pertanto è pari a 1.

Una distribuzione di probabilità discreta è in sostanza una funzione $P(k)$ di una variabile aleatoria discreta che dice quale frazione del totale è assegnata a ognuno dei valori k (che sono numeri naturali) della variabile.

Molto spesso, però, una data quantità o proprietà è distribuita non in maniera discreta bensì in maniera continua.

■ Distribuzioni continue

La stessa massa totale pari a 1 appena vista può infatti essere distribuita, anziché su sei punti materiali separati, per esempio su una sbarra lunga L

posta nella direzione x e tale che le altre due dimensioni siano trascurabili. Non potendo assegnare una massa non nulla a ogni punto geometrico x che fa parte dell'intervallo continuo $(0,L)$ su cui si estende la sbarra, si definisce invece una *densità* lineare di massa $m(x)$ della sbarra stessa (scritta, per distinguere, con la lettera minuscola), la quale dimensionalmente è una massa per unità di lunghezza. A titolo di esempio una densità lineare di massa è data da una curva come quella della [figura 1.5](#).

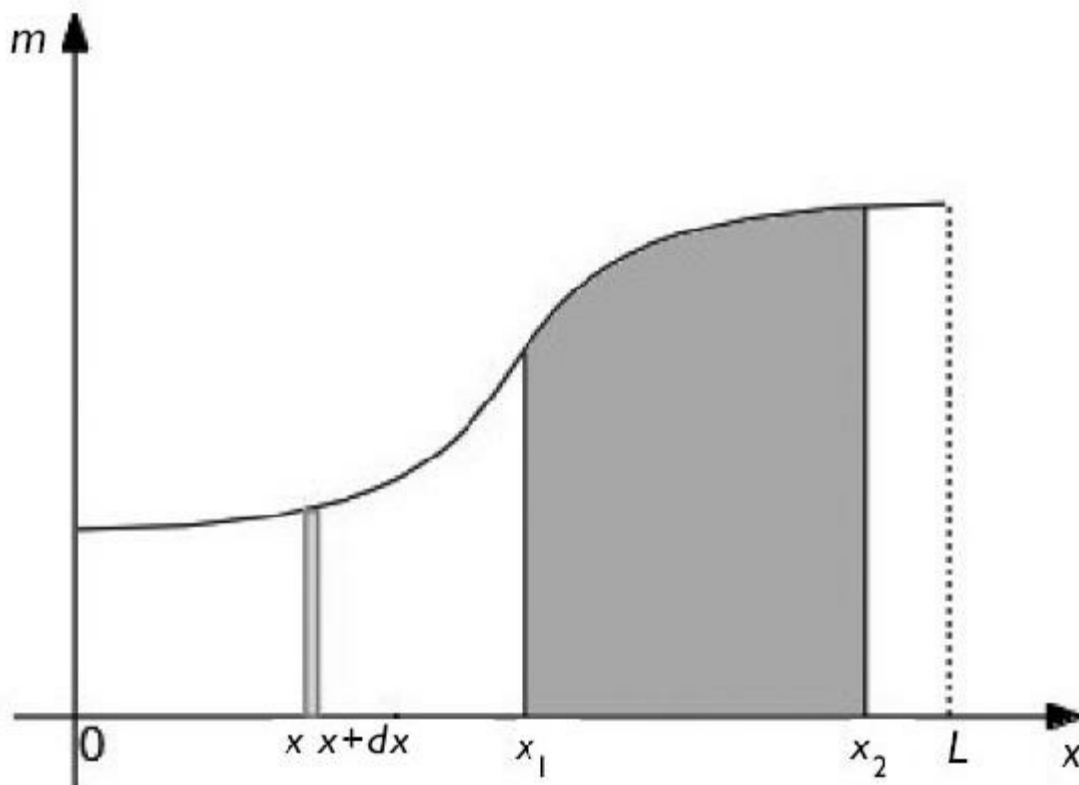


Figura 1.5 – Un esempio di densità lineare di massa.

Così facendo possiamo allora esprimere la massa, se non di un punto x , di un intervallo molto piccolo (spesso si dice “infinitesimo”) che parte dal punto x , e che con un simbolo universalmente diffuso viene indicato con dx . Tale massa infinitesima è data da:

$$M(x, x+dx) = m(x) \cdot dx$$

Ciò d'altra parte corrisponde al fatto che uno strumento di misura avrà in ogni caso un'estensione non nulla, che può essere molto piccola ma che mai si riduce a un solo punto. Nel caso discreto il problema invece non si pone perché le masse sono separate e possono essere agevolmente misurate singolarmente con una bilancia.

Per un intervallo finito, come quello che nella [figura 1.5](#) è compreso tra

x_1 e x_2 , in maniera analoga al caso discreto bisogna “sommare” le masse degli intervalli infinitesimi che compongono l’intervallo finito. Questa “somma” viene definita rigorosamente in matematica e si chiama “integrale definito”. La cosa molto interessante è che essa, quindi la massa della sbarra tra i punti x_1 e x_2 , corrisponde all’area sotto la curva che rappresenta la densità di massa, in grigio nella [figura 1.5](#). Ovviamente, l’area totale sotto la curva, poiché corrisponde alla massa totale della sbarra, deve essere pari a 1. Analogamente, spesso abbiamo a che fare con variabili aleatorie che non sono discrete bensì continue.

Una variabile aleatoria continua è certamente il punto di impatto x della palla nell’esperimento della [figura 1.1](#) se le circostanze sono tali per cui la direzione e il modulo della velocità iniziale sono parametri non conosciuti e non controllabili. Altri esempi possono essere la temperatura di un punto di un oggetto in prova o il tempo di attesa alla biglietteria di un cinema.

Per una variabile continua x dobbiamo allora assegnare una densità di probabilità $p(x)$, che sarà ancora una curva del tipo di quella della [figura 1.5](#).

Ormai sappiamo come procedere:

- La probabilità che la temperatura abbia un valore tra x e $x+dx$ è data da

$$P(x, x+dx) = p(x) \cdot dx$$

- La probabilità che la temperatura cada nell’intervallo finito di valori tra x_1 e x_2 è data dalla corrispondente area sotto la curva.
- La probabilità che la temperatura sia uno dei valori possibili, ossia l’area totale sotto la curva, è pari a 1 (certezza); si dice che la densità di probabilità $p(x)$ dev’essere normalizzata a 1.

La distinzione tra variabili discrete e variabili continue è molto importante anche in fisica quantistica. Sappiamo che il modello quantistico è intrinsecamente probabilistico, ma c’è di più – come vedremo meglio nel capitolo *Quantizzazione*: ci sono grandezze fisiche, quali lo spin e l’energia, che possono assumere intrinsecamente solo valori discreti o, come si dice, quantizzati; altre grandezze, come posizione e momento, rimangono invece continue.

Avremo allora a che fare sia con distribuzioni di probabilità discrete sia con distribuzioni di probabilità continue, le quali ultime sono rappresentate da funzioni di densità. Spesso il caso discreto è più semplice da trattare rispetto al caso continuo, sia

dal punto di vista matematico sia da quello concettuale. Ciò non sorprende visto che per ottenere dei valori cumulativi nel caso discreto semplicemente si fa una normale somma, mentre nel caso continuo occorre integrare (area sotto la curva di densità).

La curva di Gauss

Un particolare tipo di variabile aleatoria classica, che ha innumerevoli applicazioni sia teoriche sia pratiche, si ha quando consideriamo una caratteristica misurata su un gran numero di esemplari dello stesso tipo, sia di origine naturale sia manufatti dell'uomo.

La statura della popolazione femminile adulta, il diametro alla base di un albero di una certa specie, il peso di una moneta da 1 euro, il numero di chicchi di grano in un sacco, non avranno mai lo stesso valore passando da un elemento all'altro dell'insieme considerato. I fattori che determinano proprietà del genere, infatti, benché in linea di principio deterministici, sono all'atto pratico imponderabili e incontrollabili: il modello probabilistico è inevitabile. Una proprietà misurata su tutti i campioni di una popolazione è quindi una variabile aleatoria, continua o discreta.

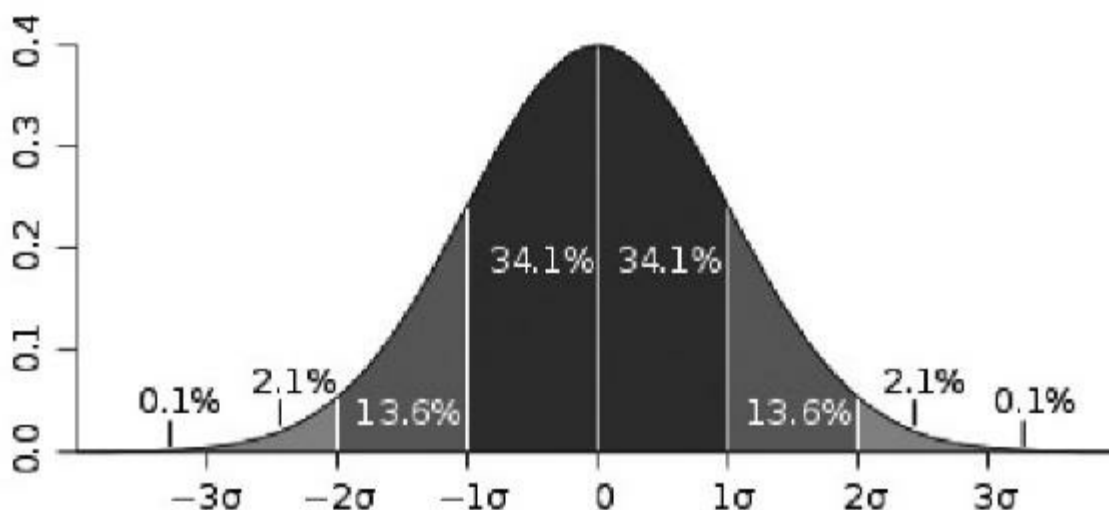


Figura 1.6 – Densità di probabilità gaussiana. *Fonte:* Wikimedia.

In sostanza, la particolarità del caso in esame consiste in questo: anziché ripetere parecchie volte un esperimento nelle identiche condizioni, prendiamo in esame parecchi esemplari che si suppone dovrebbero essere identici ma che invece per come sono stati prodotti all'origine – dalla natura o dall'uomo – hanno comunque delle differenze. Questa osservazione ci condurrà, nel capitolo *Indistinguibilità*, ad affascinanti riflessioni.

Il fatto veramente notevole è che le variabili aleatorie di questo tipo seguono sempre una ben determinata legge di distribuzione di probabilità: la distribuzione gaussiana, la quale presenta il caratteristico andamento a campana come nella [figura 1.6](#). La densità di

probabilità della figura potrebbe rappresentare la statura di una popolazione o qualsiasi altro dato del genere. Più il numero di campioni della popolazione è elevato e meglio la distribuzione di probabilità approssima la curva di Gauss.

Guardando la curva si nota subito che i valori intermedi sono frequenti mentre quelli estremi sono rari (ma non impossibili) come già osservava Platone nel *Fedone*:

Credi forse che sia tanto facile trovare un uomo o un cane o un altro essere qualunque molto grande o molto piccolo o, che so io, uno molto veloce o molto lento o molto brutto o molto bello o tutto bianco o tutto nero? Non ti sei mai accorto che in tutte le cose gli estremi sono rari mentre gli aspetti intermedi sono frequenti, anzi numerosi?

In effetti non ci basta conoscere la *media* μ , “valore vero” della variabile intorno al quale i valori aleatori si disperdono; ci occorre anche una misura di questa dispersione, che ci viene fornito da un parametro caratteristico chiamato *deviazione standard* e indicato con σ . Più è piccolo il valore di σ e più la curva che rappresenta la distribuzione di probabilità sarà “stretta” intorno al valor medio; più grande è la deviazione standard e maggiore sarà la probabilità di trovare valori lontani dalla media.

Come si vede nella [figura 1.6](#), nella gaussiana la probabilità che un valore cada tra $-\sigma$ e $+\sigma$ intorno alla media è del 68,2%; vuol dire che il 68,2% della popolazione considerata ha una statura – per esempio – che ricade in un intervallo di $\pm\sigma$. La percentuale diventa del 95,4% tra -2σ e $+2\sigma$ e del 99,7% tra -3σ e $+3\sigma$.

Naturalmente però media e deviazione standard sono definiti non solo per la gaussiana ma per una qualunque distribuzione di probabilità, continua o discreta.

Determinismo causale

I termini causalità e determinismo ricorrono continuamente, specie quando si parla di meccanica quantistica. È pertanto molto importante precisarne il significato: dal punto di vista filosofico si tratta di due concetti in linea di principio del tutto indipendenti tra di loro.

Nella scienza, così come in ogni altra disciplina di cui la mente umana si occupa e nella stessa vita quotidiana, sussiste il concetto di *causalità*, che è la relazione che esiste tra un fatto (antecedente) dell’esperienza chiamato causa e un altro fatto (successivo) chiamato effetto, relazione interpretata nel senso che la causa produce l’effetto. Il lancio della pallina è la causa del fatto che la vediamo arrivare a terra. Tuttavia, non c’è alcuna necessità insita nel rapporto di causa-effetto, né alcuna determinazione: l’effetto potrebbe essere dovuto anche a cause probabilistiche.

Il *determinismo* è la visione secondo la quale ogni stato dell’universo, date le leggi

della natura, è perfettamente e univocamente determinato da ogni altro, passato o futuro che sia. Ogni coppia posizione-velocità della pallina determina ogni altra coppia, il che vuol dire che ogni stato può essere ricavato ossia dedotto a partire da ogni altro, qualunque sia la relazione temporale tra di essi; non c'è in questo alcuna relazione di causa ed effetto, ma sussiste invece una necessità. L'intera traiettoria, data la legge di gravità e le condizioni iniziali, è necessariamente quella e non può essere altrimenti.

Se allora intendiamo questa deterministica concatenazione di stati anche in senso causale, abbiamo il *determinismo causale*, ossia ciò che nella scienza e in particolare in fisica solitamente si intende per determinismo.

La causalità viene cioè sovrimposta al determinismo. Ogni evento è non solo determinato ma anche necessariamente causato da un evento antecedente, mediante le leggi della natura. Ogni preciso stato della pallina è la causa di ogni preciso stato successivo e non può essere altrimenti che così. Lo stato iniziale della traiettoria che vogliamo studiare sarà a sua volta causato da altre condizioni precedenti.

In questa catena causa-effetto si risale quindi sempre più all'indietro, eventualmente fino a quella causa prima del mondo dibattuta fin dalla filosofia antica e che nella scienza moderna potrebbe essere identificata con la nascita dell'universo mediante il *Big Bang*. Nel senso che, essendo arrivati al punto estremo in cui non abbiamo più strumenti di indagine concettuale, semplicemente smettiamo di porci la domanda; in sostanza, è ciò che si fa quando in filosofia ci si ferma al "motore primo".

In meccanica quantistica il risultato di una misura è genuinamente casuale, dunque non rientra nel determinismo causale. Come già discusso alla fine del paragrafo *Una nuova teoria*, l'evento statistico nel suo complesso, ma non il risultato singolo, ha un insieme di circostanze precedenti che causano e determinano quella particolare distribuzione di probabilità.

Naturalmente, in tutto questo viene deliberatamente ignorato il *libero arbitrio* dell'uomo, ovvero anche questo è considerato determinato da cause precedenti e quindi di fatto solo "illusorio". Ma se la volontà cosciente della mente umana, come molti – me compreso – ritengono, può fare delle scelte effettivamente libere, allora si configura come causa prima e dovrà essere a un certo livello inserita nel modello per formare uno schema di più ampio respiro.

Il dado è tratto

Se in fisica classica la probabilità è solo soggettiva, in fisica quantistica viceversa la probabilità è genuina; rispecchia un comportamento intrinsecamente casuale della natura a prescindere dalle informazioni che abbiamo: si parla in tal caso di probabilità non epistemica. Nell'esempio visto con i neutroni, per quanto si affini la precisione nella conoscenza delle condizioni iniziali e dell'azione dell'ambiente nell'evoluzione

temporale, il punto di impatto sarà comunque distribuito casualmente secondo un'assegnata legge probabilistica.

È in ballo dunque non semplicemente l'abbandono di un modello matematico, descrittivo e predittivo, dei fenomeni fisici in favore di un altro. Ciò che si profila è proprio una diversa concezione filosofica del funzionamento intrinseco del mondo. È del tutto naturale allora che prima di attraversare il Rubicone e abbandonare senza possibilità di ritorno la vecchia, consolidata e intuitiva concezione, ci si ponga almeno il dubbio se le cose stiano realmente così.

Non potrebbe darsi che anche nel caso microscopico il comportamento probabilistico sia semplicemente una conseguenza della nostra ignoranza? Il fatto che a ogni esecuzione di esperimenti identici il risultato sia diverso potrebbe essere dovuto alla presenza di altre variabili che rimangono celate, a cause che non ci è dato conoscere. In fase di preparazione queste variabili nascoste assumerebbero un valore assegnato che determina esattamente il risultato dell'esperimento insieme alle variabili a noi note. In altre parole, potrebbe essere che non possediamo un'informazione completa sullo stato del sistema, e ciò farebbe sì che i risultati della serie di esperimenti ci appaiano casuali pur senza esserlo intrinsecamente, esattamente come avviene macroscopicamente per il dado. Secondo questo modo di vedere, quindi, la meccanica quantistica dal punto di vista concettuale e filosofico non introdurrebbe nulla di rivoluzionario.

Uno dei più tenaci aderenti alla visione deterministica del mondo fu Albert Einstein. In una lettera a Max Born, datata 4 dicembre 1926, scrisse:

La meccanica quantistica è rispettabilissima, ma una voce interiore mi dice che non è ancora la verità ultima. La teoria ci dà molto, e tuttavia non ci avvicina al segreto del Vecchio. In ogni caso, io sono convinto che Egli non giochi ai dadi.

Ritorniamo più avanti su questo punto, ma mettiamo in chiaro fin d'ora che un modello a variabili nascoste presenta grossissime difficoltà, fino a rivelarsi persino impossibile.

La visione classica del mondo è davvero crollata per sempre. Con la meccanica quantistica il caso fa il suo trionfale ingresso nella scienza e si presenta come reale, intrinseca, ineliminabile componente della natura: Dio, a quanto pare, gioca per davvero ai dadi.

Capitolo 2

QUANTIZZAZIONE

La disperazione di Planck

In ambito classico accanto alle variabili continue si prendono in considerazione anche variabili discrete – deterministiche o aleatorie – come le sei facce di un dado, le due facce di una moneta, i bit con valori 0 e 1 che sono alla base dell'elettronica digitale e dei nostri onnipresenti computer, il numero di persone che in un'indagine statistica mostrano una particolare caratteristica.

Tuttavia le grandezze fisiche, quelle che compaiono nelle leggi fisiche, dal punto di vista classico sono sempre continue: non ci possono essere salti nei valori che assumono. È ben difficile immaginare un cambiamento discontinuo in una legge della natura. La palla della [figura 1.1](#) può andare da una posizione a un'altra solo percorrendo con continuità tutte le posizioni intermedie; la stessa cosa vale per l'energia meccanica della stessa palla, somma di energia cinetica e potenziale: può passare da un valore E_1 a un valore E_2 solo assumendo nel processo tutti i valori intermedi in maniera continua.

Questo è esattamente ciò che intuitivamente ci aspettiamo; non a caso *natura non facit saltus* è un assunto fondamentale della filosofia naturale, espresso già da Aristotele e poi da Leibniz e Linneo nel XVIII secolo.

Che determinate grandezze fisiche, come l'energia e il momento angolare, nei fenomeni microscopici possano invece essere discrete è dunque un'eccezionale scoperta. Storicamente, si tratta del primo inatteso comportamento dei sistemi microscopici a essere stato svelato.



Figura 2.1 – Max Planck. *Fonte:* Wikimedia.

Il 14 dicembre 1900 Max Planck, davanti alla Società Tedesca di Fisica, avanzò per la prima volta l'ipotesi che l'energia elettromagnetica potesse essere scambiata non in maniera continua bensì solo in pacchetti discreti chiamati “quanti” e aventi valore

$$E = h\nu$$

Il quanto di energia elettromagnetica è cioè proporzionale alla frequenza ν della radiazione secondo una costante universale della natura indicata con h , alla quale successivamente fu dato il nome di *costante di Planck*, e che ha un valore numerico estremamente piccolo rispetto alle unità di misura macroscopiche:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

Planck era giunto a questa idea come unica maniera di spiegare teoricamente lo spettro dell'emissione di corpo nero misurato sperimentalmente. Ma all'inizio la considerò solo un'ipotesi di lavoro, addirittura un "atto di disperazione" compiuto per poter spiegare una delle poche incongruenze nel brillante edificio teorico della fisica classica che all'alba del nuovo secolo sembravano ancora rimanere. Tuttavia, il "rivoluzionario riluttante" Max Planck stava dando suo malgrado inizio allo smantellamento della visione classica del mondo, così come parallelamente sarebbe avvenuto anche con la teoria della relatività.

Per via di questo inizio la nuova teoria che pian piano emerse assunse la denominazione "meccanica quantistica", e il giorno della relazione di Planck viene talvolta considerato come la sua data di nascita. L'ipotesi dei quanti di energia fu poi confermata in altri fenomeni, segnatamente nell'effetto fotoelettrico, la cui spiegazione in termini di energia discreta valse ad Albert Einstein il Premio Nobel per la Fisica nel 1921. E soprattutto, l'idea che i livelli energetici siano discreti fu ciò che permise a Bohr, Schrödinger e altri di poter costruire un modello teorico dell'atomo che fosse in accordo con i dati sperimentali.

Per questa via si è arrivati a comprendere come la radiazione elettromagnetica, quando se ne osserva il comportamento fisico a dimensioni sempre più piccole, al pari della materia rivela una struttura granulare: è fatta di quanti, ossia unità elementari indivisibili, che sono poi stati chiamati *fotoni*.

In effetti, per la materia può apparire logico che se continuiamo a suddividerla questo processo non possa andare avanti all'infinito. Prima o poi arriveremo a unità fondamentali discrete che a loro volta non sono più divisibili: gli atomi, un'intuizione che risale a Democrito (V-IV secolo a.C.).

L'ipotesi atomica fu proposta su base scientifica nel 1808 da John Dalton, che la usò per spiegare le proporzioni secondo cui gli elementi si compongono nelle reazioni chimiche. Tuttavia questa idea non fu subito accettata dalla comunità scientifica: solo nel tardo Ottocento le prove sperimentali a favore dell'esistenza degli atomi si fecero così numerose, evidenti e differenziate da vincere ogni residua resistenza di tipo filosofico.

Si è poi trovato che gli atomi a loro volta hanno una struttura interna, e che di conseguenza i componenti elementari della materia ordinaria sono ancora più piccoli: elettroni da una parte, protoni e neutroni legati a formare il nucleo atomico dall'altra. Infine, allo stato attuale della conoscenza, si sa che anche protoni e neutroni non sono elementari bensì composti da unità più fondamentali ancora: i *quark*; esistono poi ancora altre particelle elementari, sulle quali non ci soffermiamo.

La scoperta del fotone implica che pure il campo elettromagnetico ha una struttura ultima, essendo anch'esso costituito da entità elementari indivisibili. Per quanto forse meno immediata in confronto alla materia, anche per la radiazione l'idea del non poter "suddividere all'infinito" non risulta certo così aliena.

A questo livello, la natura appare quindi costituita solo da particelle, siano esse

dotate di massa o, come nel caso del fotone, ne siano prive. Queste particelle elementari non più divisibili devono essere anche puntiformi. Appare intuitivo infatti che se una particella – come anche un oggetto qualunque – presenta un'estensione spaziale, allora deve necessariamente essere “fatta” di qualcosa e deve essere scomponibile in parti più piccole, in altre parole deve essere strutturata al proprio interno.

È interessante a questo proposito notare che l'elettrone, che è stata la prima particella più piccola dell'atomo a essere scoperta (da J. J. Thomson nel 1896) e che spiega i fenomeni elettrici, è proprio quella che caparbiamente ha sempre mantenuto il suo carattere puntiforme a fronte del costante progresso della scienza nell'esplorazione di dimensioni spaziali sempre più ridotte.

Vedremo in seguito che una particella elementare deve possedere ancora un'altra caratteristica, logica ma sconcertante: l'indistinguibilità.

Modelli dell'atomo

La granularità della materia e della radiazione può essere vista come caso particolare di una più generale granularità, o quantizzazione appunto, di cui sono affette certe grandezze fisiche in determinate circostanze.

Mentre la posizione e il momento rimangono sempre grandezze continue, non è così per l'energia. L'energia meccanica totale (cinetica più potenziale) di una particella come l'elettrone è in effetti una grandezza continua quando l'elettrone pur soggetto a forze esterne si trova in una condizione in cui non è legato. Come avviene quando la particella si muove tra i due elettrodi di un tubo a vuoto, in una camera a bolle, o tra i due schermi dell'esperimento delle due fenditure. L'elettrone in un atomo non è libero bensì legato al nucleo: in questa condizione la sua energia totale non può assumere con continuità tutti i possibili valori come nel caso classico, ma solo un insieme discreto di valori. La stessa cosa avviene in altri tipi di sistemi legati.

I livelli energetici discreti dell'atomo danno origine agli spettri discreti osservati sperimentalmente e che non si possono spiegare in maniera classica. E c'è di più: solo grazie ai livelli discreti di energia si può spiegare l'esistenza stessa degli atomi!

A seguito della scoperta dell'elettrone, il quale evidentemente proviene dall'interno dell'atomo, divenne chiaro che gli atomi non rappresentano i costituenti fondamentali ultimi della materia ma sono a loro volta strutturati. Poiché l'atomo in condizioni normali risulta elettricamente neutro, Thomson ipotizzò che gli elettroni (aventi carica elettrica negativa) fossero distribuiti in modo omogeneo all'interno di una materia continua carica positivamente, come l'uvetta in un panettone.

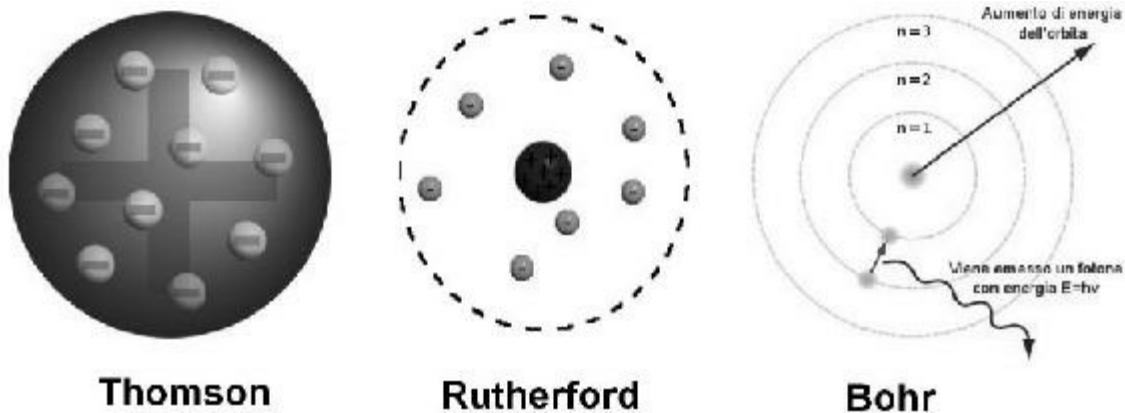


Figura 2.2 – Modelli dell'atomo. *Fonte:* Wikimedia.

Ma nel 1911 Ernest Rutherford scoprì che quasi tutta la massa di un atomo è concentrata in un minuscolo nucleo molto denso, e pertanto l'idea di Thomson non poteva essere corretta. Rutherford propose allora un modello atomico in cui gli elettroni ruotano attorno al nucleo descrivendo orbite circolari o generalmente ellittiche, come fanno i pianeti attorno al Sole. Il modello planetario sembra funzionare bene perché la forza che mantiene l'orbita è in entrambi i casi inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Si tratta per i corpi celesti della forza gravitazionale newtoniana tra oggetti dotati di massa. Questa forza è però debolissima, fino a essere trascurabile, per le particelle subatomiche e non potrebbe mai dar luogo a un sistema legato: ciò che tiene insieme elettroni e nuclei è invece la ben più intensa forza elettromagnetica tra particelle aventi carica opposta.

C'è tuttavia una differenza fondamentale tra i due casi, dovuta al fatto che in ambito classico una carica accelerata emette radiazione elettromagnetica e così facendo perde energia. Secondo la fisica classica, infatti, mentre un'orbita gravitazionale si mantiene stabile nel tempo, come osserviamo vedendo il Sole che sorge ogni giorno, un elettrone negativo che ruota attorno a un nucleo positivo è un sistema instabile. Poiché infatti ogni moto rotatorio, anche quello uniforme, è sempre un moto accelerato, l'elettrone dovrebbe irradiare energia con uno spettro continuo di frequenze e quindi rallentare e cadere a spirale con continuità sul nucleo in un tempo brevissimo. L'atomo, semplicemente, non potrebbe esistere. Ma l'atomo esiste ed è stabile. Anzi, molto più stabile, rispetto a perturbazioni esterne, di un sistema gravitazionale.

Neanche il modello atomico di Rutherford è corretto quindi, ma non ne abbiamo un altro possibile nella fisica classica; il fatto è che nell'indagine del mondo siamo arrivati a un punto in cui la fisica classica deve essere sostituita da una nuova teoria. Niels Bohr propose nel 1913 le seguenti ipotesi:

- L'elettrone nell'atomo assume solo valori quantizzati E_n di energia meccanica totale, che corrispondono a un insieme discreto di possibili orbite, numerate dall'indice intero n , le quali sono stabili.

- L'elettrone può “saltare” da un valore iniziale E_i a un valore finale E_f , e quindi da un'orbita discreta all'altra, solo assorbendo o emettendo energia elettromagnetica dall'esterno in grumi discreti e a determinate frequenze discrete secondo la formula di Plank $E = E_f - E_i = h\nu$.

Il modello atomico di Bohr, perfezionato successivamente da Arnold Sommerfeld, spiega così la stabilità dell'atomo nonché le righe di frequenza discrete osservate sperimentalmente nello spettro della radiazione elettromagnetica emessa dagli atomi, almeno per quelli più semplici. Questo modello comporta evidentemente una netta frattura rispetto alla fisica classica, e rappresenta un passo determinante nello sviluppo embrionale della meccanica quantistica, proprio per avere introdotto delle grandezze fisiche quantizzate.

Ovviamente, però, il modello di Bohr non dice ancora tutto: sappiamo infatti che l'ambito microscopico è il regno della casualità, dove le grandezze fisiche sono variabili aleatorie, continue o discrete. Questo ulteriore passo fu compiuto da Erwin Schrödinger nel 1926, con l'elaborazione della sua celebre equazione. Il suo modello di atomo prevede in corrispondenza di ognuno degli stati con energia E_n (possibili valori di una variabile aleatoria discreta) non più un'orbita definita dell'elettrone bensì una variabile aleatoria continua che fornisce le possibili posizioni dell'elettrone in quello stato, e che dà origine al cosiddetto *orbitale*.

Lo spin

Nella sua formulazione originaria, Bohr ottenne la quantizzazione delle orbite (che vuol dire, sottolineiamolo ancora, che le possibili orbite costituiscono un insieme discreto e non continuo) imponendo valori discreti non direttamente all'energia, bensì al modulo di un'altra grandezza fisica: il momento angolare. Le due cose sono di fatto equivalenti, poiché l'una implica l'altra.

Il momento angolare è una grandezza vettoriale legata al moto rotatorio, definita come nella [figura 2.3](#), che è continua in meccanica classica.

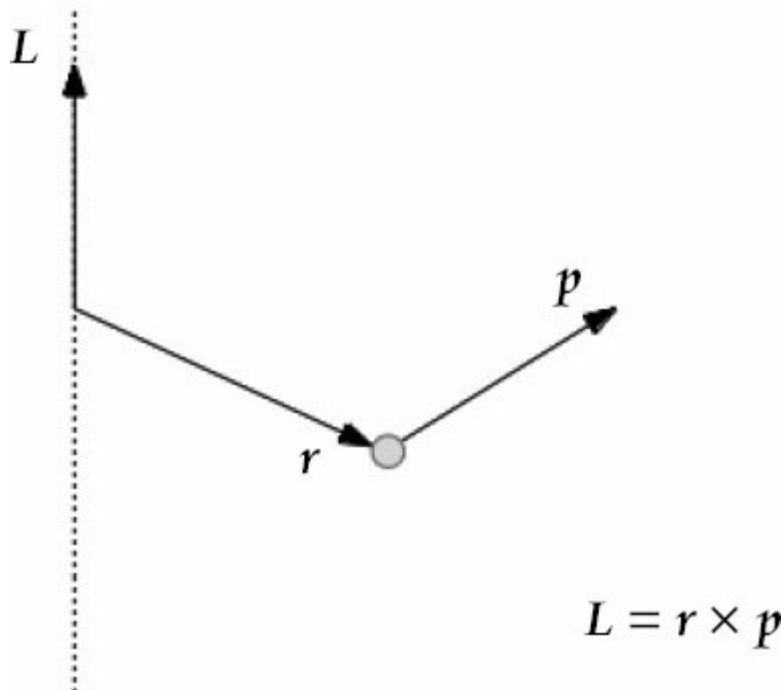


Figura 2.3 – Il momento angolare.

In meccanica quantistica questa grandezza risulta quantizzata, e in una maniera molto particolare: se chiamiamo L il vettore momento angolare dell'elettrone nel suo moto orbitale attorno al nucleo, ciò che assume valori discreti infatti non è solo il modulo L del vettore bensì anche la sua direzione, o orientazione spaziale che dir si voglia! Ciò vuol dire che il vettore momento angolare orbitale non può variare con continuità la sua orientazione nello spazio, ma solo "a scatti". In termini più precisi: scelta una qualunque direzione orientata z risulta quantizzato il valore della componente L_z del vettore. Dunque in meccanica quantistica L e L_z sono variabili aleatorie discrete.

In un sistema di tipo planetario, la rotazione attorno al centro del sistema non è l'unica cui un oggetto può essere sottoposto, c'è anche la rotazione su se stesso, che possiamo chiamare rotazione propria; a entrambe è associato un momento angolare. La Terra esegue un moto di rotazione orbitale attorno al Sole e un moto di rotazione attorno al proprio asse; la Luna ruota sia attorno alla Terra sia su se stessa.

Un elettrone però non ha estensione, è puntiforme, e non ha senso dire che un punto ruoti su se stesso. E tuttavia, l'elettrone presenta una caratteristica fisica che si può interpretare dicendo che la particella si comporta *come se* ruotasse su se stessa: ancora una peculiarità del mondo microscopico.

Come facciamo a saperlo? Ancora una volta, perché mentre un sistema planetario è un sistema legato di tipo gravitazionale, un atomo è un sistema legato di tipo elettromagnetico, e ciò ha le sue particolarità. Un oggetto dotato di carica elettrica che possieda un momento angolare, infatti, si comporta in un modo simile all'ago magnetizzato di una bussola, cosa che può essere misurata mediante un campo magnetico non omogeneo esterno.

È possibile quindi misurare la componente del momento angolare totale di un atomo secondo una direzione spaziale z , che è quella lungo la quale si dispone lo strumento adoperato, detto apparato di Stern-Gerlach dai nomi dei fisici che per la prima volta eseguirono questo esperimento nel 1922.

L'apparato si basa in pratica su un magnete i cui poli sono sagomati in maniera tale da rendere il campo magnetico non uniforme: tra i poli il campo aumenta nella direzione da Sud a Nord, e in questo modo viene fisicamente fissata la direzione di misura; chiamiamola asse z . Una particella che passa tra i poli dell'apparato viene deviata in maniera proporzionale alla componente z del proprio momento angolare totale. Se questa è positiva la deviazione avviene verso l'alto dell'apparato, se è negativa verso il basso.

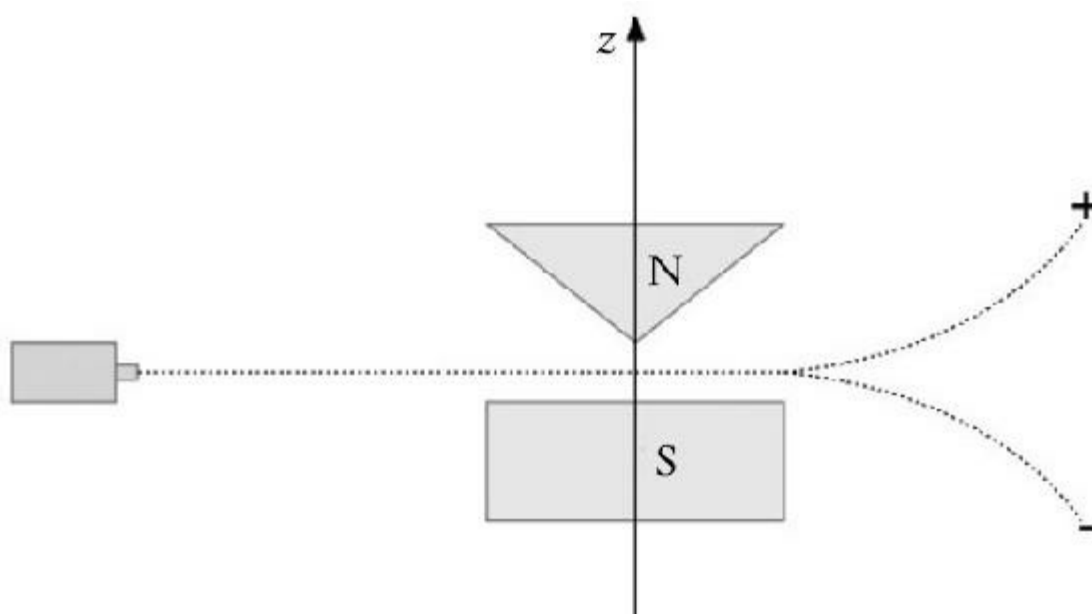


Figura 2.4 – Schematizzazione dell'apparato di Stern-Gerlach.

In questa maniera si scopre che oltre a un momento angolare orbitale L , l'elettrone possiede anche un momento angolare proprio \hat{S} , che viene denominato *spin*. Il quale inoltre presenta solo valori discreti per la componente misurata S_z .

Una scoperta notevole, che viene interpretata in questo modo: lo spin è una grandezza fisica nuova, peculiare dell'ambito quantistico (nel quale è definita per ogni sistema fisico, elementare o composto) e che non ha alcun corrispondente classico.

Lo spin si comporta fisicamente in tutto e per tutto come un momento angolare proprio, anche se non può corrispondere a una rotazione fisica dell'elettrone su se stesso.

I possibili valori dello spin come grandezza fisica dinamica dipendono da una grandezza intrinseca invariabile, una proprietà caratteristica di quella particella (ciò non avviene per il momento angolare orbitale), indicata con s e chiamata *numero quantico*

di *spin* o ancora semplicemente *spin*. Attenzione perciò a non confondere lo *spin* come grandezza dinamica con lo *spin* come grandezza intrinseca; solitamente il contesto permette di capire di che cosa stiamo parlando, ma se occorre si può evitare esplicitamente l'ambiguità, e comunque i simboli usati sono diversi nei due casi.

Lo *spin* come grandezza intrinseca va ad aggiungersi alla massa e alla carica nell'identificare una particella elementare. La esprimiamo in multipli di $\frac{h}{2m}$, numero che ricorre spesso per cui nella letteratura scientifica lo si indica per brevità con il simbolo \hbar (ovvero "h tagliato", detta anche costante di Planck ridotta):

- $s = \frac{1}{2}$ per l'elettrone, come anche per il neutrone, il protone, il quark e il neutrino;
- $s = 1$ per il fotone, come anche per gli altri mediatori delle interazioni fondamentali;
- $s = 0$ per il bosone di Higgs.

Il modulo della grandezza dinamica *spin* per un elettrone vale

$$S = \sqrt{[s(s + 1)]} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

C'è quindi un solo possibile valore, per cui, a differenza di quanto avviene per il modulo del momento angolare orbitale, S è costante e non aggiunge informazioni dinamiche.

Di fondamentale importanza è al contrario la componente S_z dello *spin* dinamico di un elettrone lungo una direzione z arbitrariamente scelta, la quale pure talvolta viene chiamata semplicemente *spin*; si tratta di una variabile aleatoria che ha solo due possibili valori discreti (come nel lancio di una moneta):

- $S_z = \frac{1}{2}$ (stato di "spin su").
- $S_z = -\frac{1}{2}$ (stato di "spin giù").

La situazione è illustrata dalla [figura 2.5](#). Si tratta di un sistema fisico molto importante dal punto di vista concettuale, che ritroveremo spesso in seguito. Essendo lo *spin* dinamico un momento angolare proprio, e non orbitale, quanto detto in proposito vale in generale, non solo quando l'elettrone fa parte dell'atomo.

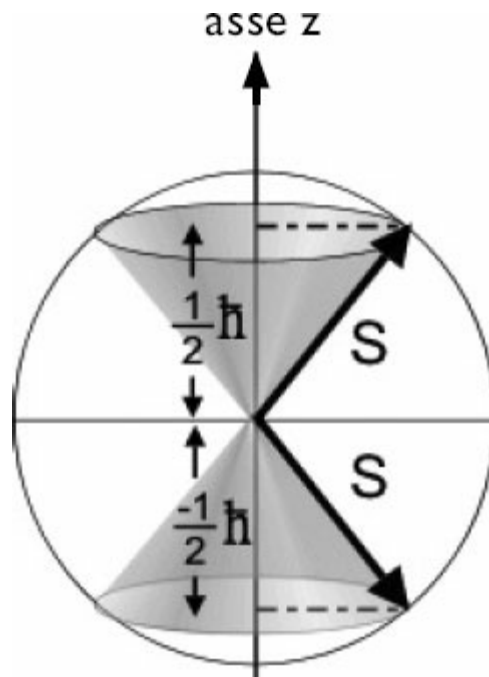


Figura 2.5 – Lo spin dell’elettrone. *Fonte:* Wikimedia.

Per essere espliciti, i possibili valori di S_z per l’elettrone sono in ogni situazione fisica dati da $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$; sarà la distribuzione di probabilità di questi due valori a essere eventualmente diversa. Ovviamente, ai fini della distribuzione di probabilità i due possibili valori, esattamente come nel caso del lancio di una moneta, possono essere denominati in maniera arbitraria.

Benché solitamente si parli di spin “su” e “giù”, bisogna tenere presente che in realtà i due possibili stati di spin lungo un’assegnata direzione z non sono mai esattamente allineati con essa nel verso positivo e negativo, bensì formano con la direzione z sempre un certo angolo.

Come reso esplicito dalla [figura 2.5](#), conoscendo solo il modulo del vettore S e la sua componente z possiamo al più affermare che il vettore stesso è posizionato su un cono; come vedremo, le tre componenti secondo gli assi cartesiani non sono determinabili tutte insieme. Si può misurare S_r in ogni direzione spaziale r , semplicemente ruotando l’apparato di Stern-Gerlach fino ad allinearlo con la direzione voluta. Ma non è affatto possibile mettere insieme le varie componenti come ci si aspetterebbe in ambito classico per un normale vettore nello spazio fisico tridimensionale. In meccanica quantistica le componenti dello spin (e anche del momento angolare orbitale) secondo direzioni ortogonali sono a tutti gli effetti grandezze fisiche diverse, incompatibili tra loro. Ne parleremo nel capitolo *Indeterminazione*.

Capitolo 3

SOVRAPPOSIZIONE

Il modello della meccanica quantistica

Come è fatto quindi il modello matematico sul quale la nuova teoria si basa? Non è il caso qui di proseguire con lo sviluppo storico della nuova teoria; forniamo invece direttamente il punto di arrivo. Per quanto possa apparire astratta, la formulazione matematica della meccanica quantistica (non relativistica) permette di descrivere e prevedere con altissimo grado di precisione tutti i fenomeni nuovi e strani che si constatacono sperimentalmente. È una formulazione matematica del tutto inconsueta se guardata da un'angolazione classica, e tanto precisa, logica e rigorosa dal punto di vista matematico quanto astratta dal punto di vista fisico. Tuttavia, è assolutamente necessaria se si vuole che il modello renda conto dei fenomeni fisici quantistici.

La logica di base rimane la stessa. Quello che occorre è:

- Lo stato del sistema fisico: una funzione matematica che caratterizzi il sistema a ogni istante dal punto di vista dinamico.
- La legge dinamica: un'equazione di evoluzione che trasformi lo stato a un certo istante nello stato a un altro istante tenendo conto dell'interazione con l'ambiente; si noti che anche in meccanica quantistica il tempo assume il ruolo di parametro che etichetta i successivi stadi di un'evoluzione.
- Un procedimento matematico, ossia delle regole, per ricavare a partire dallo stato tutte le informazioni fisiche dinamiche sul sistema. In altre parole: per tutte le grandezze fisiche dinamiche misurabili, siano esse continue o discrete, bisogna stabilire qual è lo spettro dei valori possibili, e ricavare per essi la distribuzione di probabilità.

Anche qui, come già osservato per la fisica classica, questi elementi matematici altro non sono che postulati, i quali funzionano molto bene, e in ciò consiste la dimostrazione della loro validità.

Occorre poi introdurre una precisazione importantissima: scelta una grandezza fisica, normalmente esiste uno stato del sistema fisico in esame nel quale quella grandezza a un certo istante di tempo è perfettamente determinata, nel senso che si ha

probabilità 1 per un preciso valore di quella grandezza e 0 per tutti gli altri possibili valori.

Un tale stato si chiama *autostato* di quella grandezza fisica a quell'istante, e il corrispondente valore si chiama *autovalore*.

Un esempio può chiarire il concetto. Ammettiamo che un sistema a due stati come lo spin dell'elettrone si trovi a un dato istante in uno stato in cui la distribuzione di probabilità per S_z sia fatta così:

$$P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}, P(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

Lo stato del sistema non è un autostato per la grandezza S_z . Se invece lo stato del sistema è tale che in un certo istante di tempo si abbia:

$$P(\frac{1}{2}) = 1, P(-\frac{1}{2}) = 0$$

allora si tratta proprio di un autostato di S_z con corrispondente autovalore $\frac{1}{2}$.

■ Confronto tra il modello classico e quello quantistico

Nelle [figure 3.1](#) e [3.2](#) confrontiamo i modelli rispettivamente della meccanica classica e di quella quantistica per una particella materiale. Le denominazioni sottolineate si riferiscono a concetti esclusivamente fisici, sperimentali, mentre quelle in corsivo etichettano i corrispondenti elementi del modello matematico della teoria. Di questi ultimi nelle figure vengono anche date, per completezza, le espressioni matematiche esplicite, ma il lettore le può tranquillamente ignorare se vuole.

Come si può vedere, dal punto di vista concettuale si procede in maniera simile nei due casi, almeno fino alla misura. Ma è il modello matematico che è completamente differente per la meccanica quantistica, poiché diverso è ciò che otteniamo da un procedimento di misura ripetuto su una serie di esperimenti identici. E questo, come abbiamo visto, rappresenta il punto di partenza per invocare la necessità della nuova teoria.

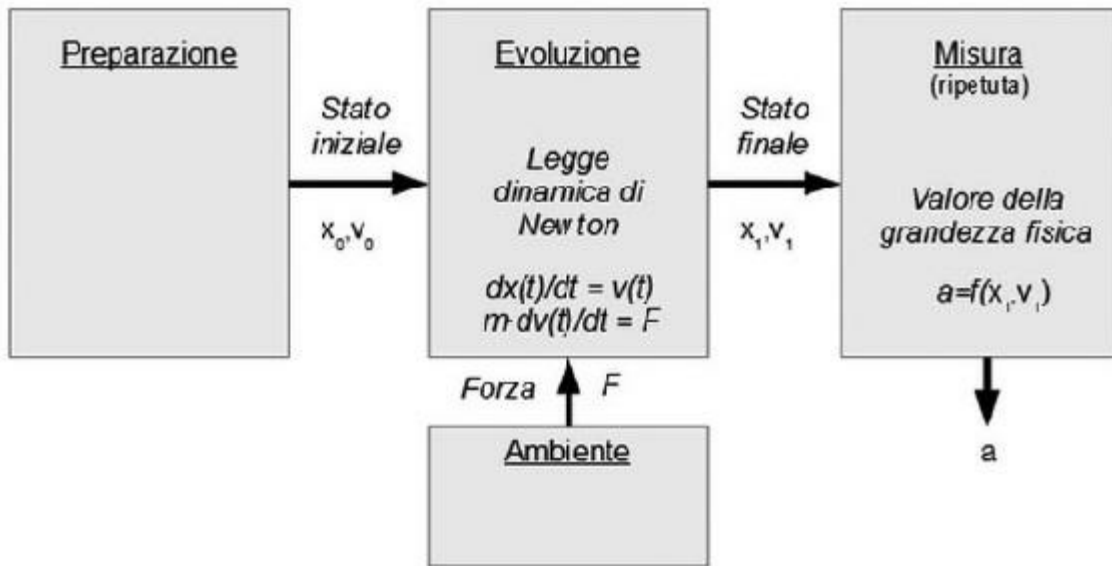


Figura 3.1 – Lo schema concettuale della meccanica classica.

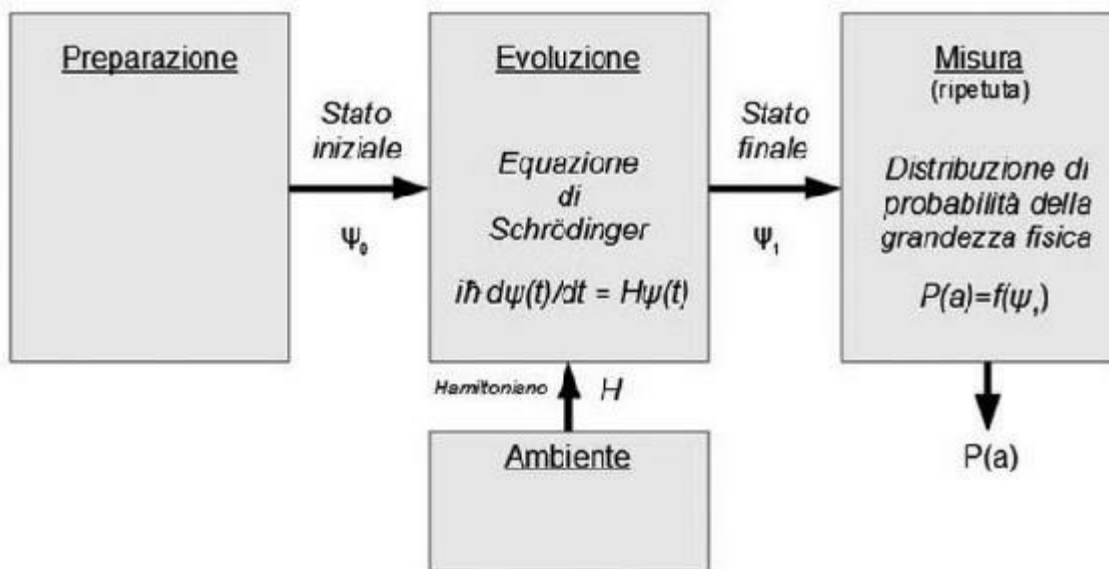


Figura 3.2 – Lo schema concettuale della meccanica quantistica.

L'evoluzione dinamica dello stato è pure governata da un'equazione diversa, l'equazione di Schrödinger anziché quella della dinamica di Newton. All'interno dell'equazione è scritta l'azione dell'ambiente sullo stato, rappresentata dal simbolo H . Sull'equazione di Schrödinger torneremo ancora più avanti, nel capitolo *Evoluzione*.

Ma l'elemento che più si contraddistingue è senz'altro lo stato, che indichiamo con la lettera greca Ψ .

Che cos'è dunque esattamente lo stato quantistico? Come è fatto dal punto di vista matematico? E soprattutto: qual è realmente il suo significato? A queste domande risponderemo introducendo quel grande mistero che è la sovrapposizione quantistica.

Ma anticipiamo già il fatto sorprendente che la rappresentazione matematica dello stato, scelta di volta in volta a seconda della situazione fisica, deve necessariamente essere espressa mediante numeri complessi e non con i normali numeri reali cui siamo abituati. Anche per questo lo stato quantistico non ha alcun significato fisico diretto!

Quello che fisicamente conta, nel modello quantistico, non è tanto la forma matematica dello stato quanto che dallo stato ψ sia possibile ricavare la distribuzione di probabilità $P(a)$ di ogni grandezza fisica a (continua o discreta che sia) associata al sistema, mediante un preciso procedimento matematico. Vedremo che questa distribuzione di probabilità è l'unico elemento del modello ad avere un significato fisico, e infatti essa è l'unica cosa che possiamo misurare sperimentalmente.

La regola di Born

Per vedere quali caratteristiche matematiche deve avere in meccanica quantistica lo stato di un sistema fisico, riprendiamo in esame l'esperimento delle due fenditure delle [figure 1.2 e 1.3](#).

Eseguiamo in realtà tre diversi esperimenti, e ragioniamo sempre in termini di probabilità classica.

In ognuno degli esperimenti un numero molto grande di neutroni viene inviato verso lo schermo di preparazione, *uno dopo l'altro separatamente*. In ciascun esperimento posizioniamo il rivelatore in un punto dello schermo di misura – individuato dalla coordinata x – e contiamo ogni volta quante particelle vanno a finire in quel punto.

Essendo x una variabile continua, dobbiamo fare riferimento a una densità di probabilità, e parlare di probabilità solo per intervalli. Per brevità omettiamo nella notazione la variabile temporale t quando non strettamente necessario.

I tre esperimenti sono eseguiti come segue:

- a) La fenditura in alto è aperta e la fenditura in basso è chiusa.
- b) La fenditura in alto è chiusa e la fenditura in basso è aperta.
- c) Entrambe le fenditure sono aperte.

Nell'intervallo spaziale molto piccolo tra x e $(x+dx)$ arrivano sullo schermo di misura rispettivamente $N_A(x)$, $N_B(x)$ e $N_C(x)$ neutroni. Evidentemente, ciò che ci aspettiamo secondo la fisica classica, ma anche secondo la logica di tutti i giorni, è che si abbia:

$$N_C(x) = N_A(x) + N_B(x)$$

Detto in altre parole, la situazione *a)* e la situazione *b)* sono *indipendenti*, non interferiscono una con l'altra: se le mettiamo insieme realizzando la situazione *c)* il numero di neutroni che arriva in x è semplicemente la somma del numero di neutroni delle situazioni "componenti".

Elementare. E del resto, questo è esattamente il risultato che in effetti otterremmo se eseguiamo questi esperimenti con palline, anziché con particelle subatomiche, ma sempre in maniera aleatoria. Si noti che in un esperimento classico con minuscole palline, infatti, il punto d'impatto sullo schermo di misura apparirebbe casuale qualora il dispositivo che spara le palline non punti efficientemente in una direzione precisa bensì le lanci secondo una direzione non controllabile, contenuta all'interno di un certo angolo. Le palline andrebbero quindi a formare sullo schermo di misura due mucchietti in corrispondenza delle due fenditure, come nella [figura 3.3](#).

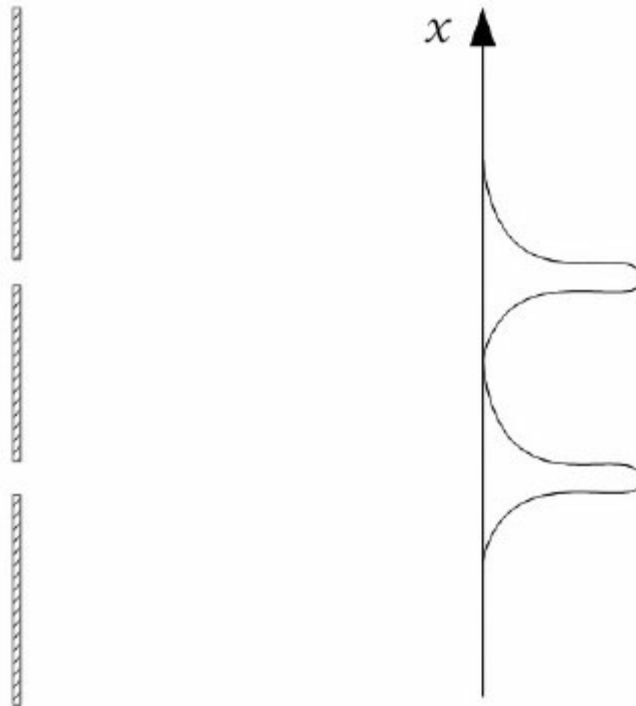


Figura 3.3 – Distribuzione delle palline nell'esperimento con due fenditure.

Di conseguenza, se consideriamo la densità di probabilità nei tre casi, la previsione classica sarebbe che la densità per il caso *c)* è proporzionale alla somma di quelle per i casi *a)* e *b)*:

$$p_C(x) \propto p_A(x) + p_B(x)$$

che è la relazione che caratterizza in termini di densità di probabilità l'indipendenza

delle situazioni *a*) e *b*) che vengono messe insieme in *c*).

Parliamo di proporzionalità e non di uguaglianza perché le probabilità, per loro stessa definizione, devono poi essere normalizzate a 1, per mezzo di una costante moltiplicativa.

La grande sorpresa è allora constatare che, contrariamente alle aspettative, negli esperimenti con due fenditure eseguite con neutroni – come la [figura 1.3](#) lascia ben intuire, specialmente per via del picco *in mezzo* alle fenditure – la semplice e logica regola della somma non vale; la proporzionalità rispetto alla somma non c'è più, perché compare un termine aggiuntivo:

$$p_C(x) \propto p_A(x) + p_B(x) + I(x)$$

In ogni dato punto x si trova sperimentalmente che la densità di probabilità risultante è, a meno della normalizzazione, maggiore o minore della somma delle densità di probabilità componenti; queste ultime quindi si possono rafforzare o indebolire a vicenda.

Ma questo non si potrebbe comunque ottenere sommando algebricamente le densità di probabilità, poiché queste sono sempre positive. Nel modello teorico che vogliamo costruire dobbiamo avere pertanto un'espressione che permetta di ricavare p_C date p_A e p_B , nella quale dovrà comparire un termine aggiuntivo $I(x)$, che chiamiamo termine d'interferenza. Esso fa sì che la densità di probabilità totale sia maggiore ($I(x) > 0$) o minore ($I(x) < 0$) rispetto alla somma delle densità di probabilità componenti, a seconda del punto x considerato. Ovviamente ci possono essere dei punti in cui $I(x) = 0$, ma in generale il termine di interferenza sarà diverso da zero.

Quello che avviene ora è che le situazioni *a*) e *b*) per quel che concerne le probabilità non sono più indipendenti bensì in qualche modo *interferiscono* tra di loro quando le mettiamo insieme in *c*).

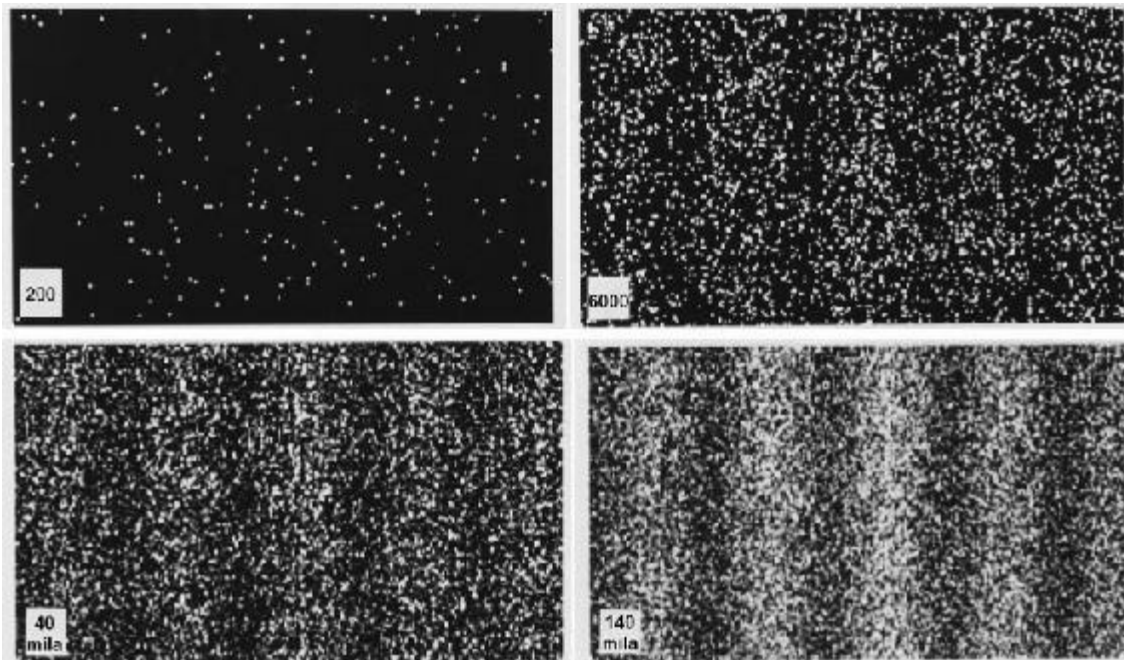


Figura 3.4 – Impatto dei neutroni sullo schermo di misura. *Fonte:* Wikimedia.

Se ripetiamo molte volte l'esperimento con entrambe le fenditure aperte, inizialmente i puntini neri sullo schermo dovuti all'impatto dei neutroni sembrano distribuirsi senza alcuno schema. Ma più ne inviamo e più appare evidente all'occhio il formarsi di un *pattern*, una precisa legge di distribuzione dei punti di arrivo in cui si alternano creste e valli, come nella [figura 3.4](#).

Appare peraltro ragionevole che invece lo stato ψ del sistema fisico debba comunque sottostare alla regola della somma, benché non sia così per le probabilità che da esso si ricavano:

$$\psi_C(x) = k \cdot [\psi_A(x) + \psi_B(x)]$$

dove k è un coefficiente di normalizzazione da determinare.

Per ipotizzare la relazione tra stato quantistico e densità di probabilità necessaria affinché si abbia interferenza, si può procedere in analogia con il ben noto fenomeno classico dell'interferenza tra onde che si presenta in natura, e che anzi caratterizza i fenomeni ondulatori.

■ Campo ed energia

Consideriamo una grandezza fisica classica in un generico punto x dello spazio, come per esempio il campo elettrico $E(x,t)$ – una grandezza vettoriale, variabile periodicamente nel tempo (la stessa cosa si potrebbe

dire di un campo di pressione meccanica). Prendiamo in considerazione la componente lungo una direzione assegnata.

Nel punto selezionato il campo elettrico varia periodicamente tra $+A$ e $-A$, per esempio in maniera sinusoidale con frequenza ω :

$$E(x,t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

(La funzione coseno assume valori che vanno da -1 a $+1$.) Dal punto di vista classico il campo elettrico è una grandezza deterministica e misurabile per suo conto.

Supponiamo che nel punto x ci sia la sovrapposizione di due campi elettrici E_A e E_B , per esempio quelli dovuti a due identiche sorgenti puntiformi di onde elettromagnetiche come nella [figura 3.5](#).

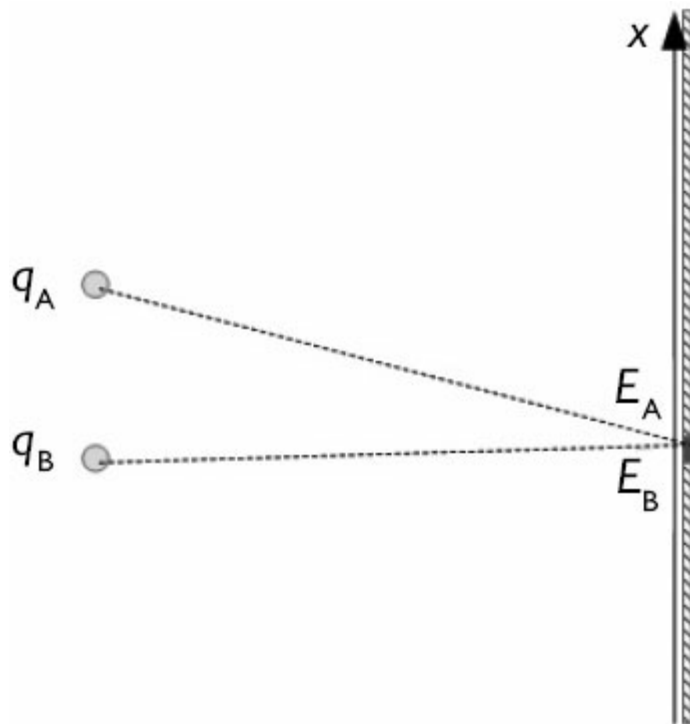


Figura 3.5 – Sovrapposizione di campi elettrici.

Il campo totale E_C è in effetti pari alla somma dei campi componenti:

$$E_C = E_A + E_B$$

Che i campi che fisicamente si sovrappongono vadano semplicemente sommati per ottenere il campo risultante è un principio molto importante in fisica, chiamato *principio di sovrapposizione degli effetti*, il quale esprime la linearità delle leggi fisiche che reggono il fenomeno in esame. Molte leggi fisiche fondamentali sono infatti lineari, ma ce ne sono anche di non lineari:

un esempio è l'equazione di Einstein della relatività generale.

Associata con un campo c è poi solitamente un'ulteriore grandezza fisica, l'energia che il campo porta con sé e che nel punto x può essere misurata o trasferita a un altro sistema fisico, per esempio annerendo una lastra. La densità di energia u che il campo ha in quel punto è proporzionale al quadrato del campo; possiamo per semplicità prenderla uguale, è solo una questione di unità di misura:

$$u = E^2$$

Il fatto che tra ampiezza ed energia del campo ci sia una relazione di tipo quadratico ha una conseguenza molto interessante.

Singolarmente, i due campi che si sovrappongono hanno rispettivamente densità di energia

$$u_A = E_A^2 \text{ e } u_B = E_B^2$$

Tuttavia, la densità di energia totale u_C , grandezza che determina l'annerimento dello schermo di misura opportunamente trattato, *non* è pari alla somma delle energie componenti, ma abbiamo un termine aggiuntivo semplicemente per via dello sviluppo del quadrato della somma:

$$u_C = E_C^2 = (E_A + E_B)^2 = E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B$$

Il secondo punto essenziale è che questo termine aggiuntivo variando con x può assumere segno positivo o negativo, ed è quindi un termine di interferenza. Infatti, poiché per giungere dalle sorgenti al punto generico x le due onde compiono tragitti di lunghezza spaziale differente, esse saranno in tale punto sfasate tra di loro, come nella [figura 3.6](#); presenteranno cioè una fase relativa φ che dipende dalla differenza di percorso:

$$E_A(x,t) = A \cdot \cos(\omega t) \quad E_B(x,t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi(x))$$

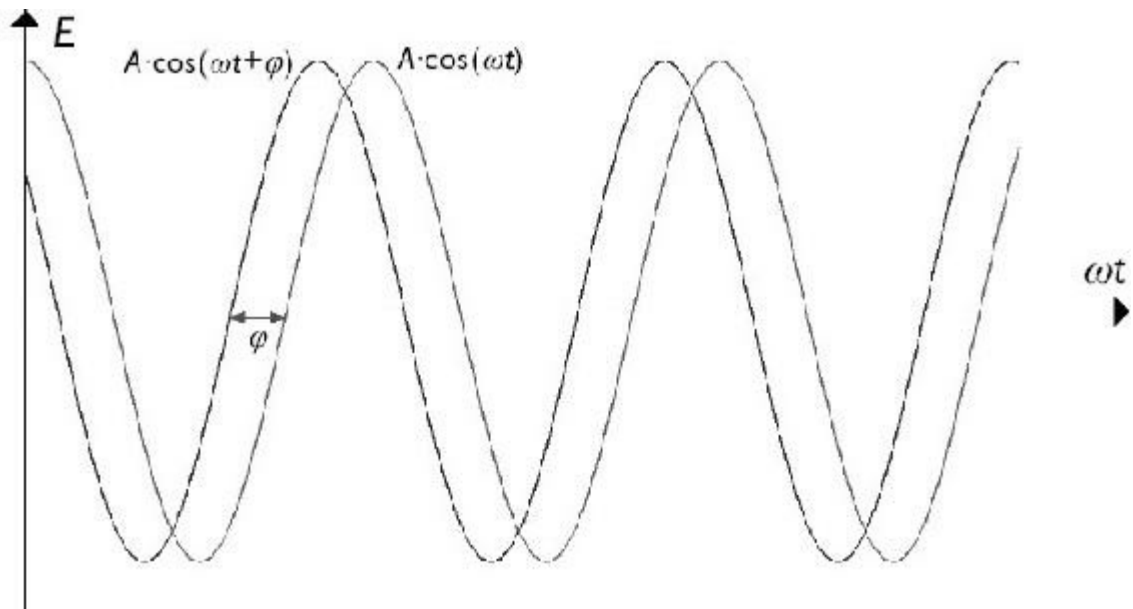


Figura 3.6 – Sfasamento tra grandezze sinusoidali.

Questa fase φ rappresenta, in altre parole, una variabile in più presente nella descrizione del sistema fisico.

Con un semplice calcolo si vede allora che la densità di energia totale è del tipo:

$$u_C = u_A + u_B + U_I \cdot \cos(\varphi(x))$$

e differisce pertanto da $u_A + u_B$ per un termine di interferenza; di quest'ultimo ci interessa la parte $\cos(\varphi(x))$, che è dovuta allo sfasamento tra i due campi e può essere maggiore o minore di zero, in dipendenza di x .

La stessa cosa avviene se i campi che si sovrappongono non hanno un semplice andamento sinusoidale ma variano in maniera più generale. La relazione di fase tra loro è più complicata ma continua a sussistere, per cui nell'espressione della densità di energia totale compare un termine di interferenza. Il contributo di quest'ultimo accresce o rispettivamente riduce la somma delle densità di energia componenti: l'annerimento che rileviamo varia con un tipico andamento caratterizzato da un alternarsi di massimi e minimi.

Per riassumere, ribadiamo esplicitamente che il fenomeno dell'interferenza è causato da *due* precise circostanze:

- La relazione tra campo ed energia è *quadratica*.
- I due campi sovrapposti differiscono per una *fase* dipendente dal punto spaziale considerato.

Possiamo allora pensare di prendere come stato quantistico non direttamente la densità di probabilità $p(x)$, bensì un'ampiezza di probabilità $\psi(x)$. Tra le due assumiamo una relazione quadratica, esattamente come tra il campo elettrico e la corrispondente densità di energia (le barrette indicano il modulo):

$$p(x) = |\psi(x)|^2$$

relazione che storicamente fu proposta per primo da Max Born nel 1926. Ciò a sua volta vuol dire che la probabilità di trovare la particella all'atto della misura in un intorno infinitesimo dx di un punto di coordinata x è data da:

$$P(x, x+dx) = |\psi(x)|^2 \cdot dx$$

Se chiamiamo:

- $\psi_A(x)$ lo stato del neutrone in x preparato mediante la procedura a),
 - $\psi_B(x)$ lo stato del neutrone in x preparato mediante la procedura b),
 - $\psi_C(x)$ lo stato del neutrone in x preparato mediante la procedura c),
- abbiamo

$$\psi_C(x) = k \cdot [\psi_A(x) + \psi_B(x)]$$

dove la scelta della costante di normalizzazione, a motivo del significato probabilistico, va fatta in maniera tale che l'area sotto la curva di $|\psi_C(x)|^2$ sia pari a 1.

Per le densità di probabilità abbiamo invece

$$p_C(x) = k^2 \cdot [p_A(x) + p_B(x)]^2 \neq k^2 \cdot [p_A^2(x) + p_B^2(x)]$$

per via della relazione quadratica data dalla regola di Born: il quadrato della somma non è uguale alla somma dei quadrati ma contiene certamente un termine aggiuntivo proveniente dal doppio prodotto. (La normalizzazione a 1, ovviamente, rimane.)

Questa però è solo una delle due condizioni necessarie perché si abbia interferenza. L'altra è che tra i due campi componenti ci sia qualcosa di simile alla fase relativa che sussiste tra i campi di due onde sinusoidali che hanno compiuto percorsi spaziali di lunghezza differente per giungere nel punto x .

Nel caso in esame è spontaneo estendere ancora l'analogia con le onde elettromagnetiche e assumere per ψ una funzione di tipo sinusoidale, formalmente coincidente con quelle che descrivono la propagazione di un'onda; a quel punto la fase è già presente e il problema banalmente non si pone.

La lunghezza d'onda di de Broglie

Matematicamente tutto funziona bene, quindi. Ma che cos'è in realtà lo stato quantistico dal punto di vista fisico? Ovviamente, è del tutto naturale supporre inizialmente che lo stato sia una caratteristica fisica della particella, magari di tipo nuovo, inesistente nella fisica classica.

Dal punto di vista fisico, infatti, come abbiamo visto la caratteristica essenziale è che lo stato può essere composto da una sovrapposizione di stati che interferiscono tra di loro per produrre la distribuzione di probabilità totale, grazie alla regola di Born. Si tratta di una relazione che sappiamo essere formalmente identica a quella che sussiste tra ampiezza ed energia di un campo elettrico. Ma l'analogia finisce qui, in questa corrispondenza tra formule matematiche che elevano al quadrato, o abbiamo trovato qualcosa di nuovo?



Figura 3.7 – Erwin Schrödinger. *Fonte:* Wikimedia.

Prendiamo in considerazione la grandezza fisica posizione. Per ricavarne la distribuzione di probabilità, in maniera tale da tener conto dell'interferenza che osserviamo sperimentalmente, abbiamo introdotto ad hoc un'ampiezza di probabilità, semplicemente come strumento matematico. Si tratta a sua volta di una grandezza fisica relativa alla particella in esame?

Erwin Schrödinger fu, al pari di Einstein, un deciso oppositore dell'idea di una probabilità intrinseca nella natura. A questo proposito pare che dicesse: “Non mi piace, e mi dispiace di averci del tutto avuto a che fare.”

Schrödinger portò avanti dei tentativi per assegnare a quest'onda un significato fisico diretto come densità spaziale di massa o di carica di una particella come l'elettrone. Ma questi tentativi non hanno potuto reggere. Per esempio, un'onda può

essere più o meno concentrata spazialmente, formando il cosiddetto pacchetto; ma durante il moto questo si disperderebbe comunque, rendendo vana la nozione di localizzazione spaziale tipica del concetto di particella.

Tanto più non si può assegnare un significato fisico diretto allo stato quantistico, dato che questo come vedremo a breve deve avere valori complessi, e oltre a ciò non è sempre esprimibile come funzione dello spazio.

Si tratta quindi semplicemente di una parte solo matematica del modello; ciò che ha significato fisico è esclusivamente la misura delle grandezze fisiche, la posizione nel caso in esame, e quindi la corrispondente distribuzione di probabilità (che dallo stato si ricava). Chiariamo meglio questo punto.

Il campo elettromagnetico si propaga nello spazio per onde, a partire dal punto in cui è stato generato; così come per onde si propaga il suono e qualunque altro “disturbo” meccanico prodotto in un punto di un mezzo materiale. Il fenomeno dell’interferenza è tipico della propagazione ondosa, tanto che il suo verificarsi viene considerato come indizio sicuro che abbiamo a che fare con onde.

L’esperimento delle due fenditure, entrambe aperte, può essere eseguito, anziché con particelle, con onde. Lo abbiamo già visto nella [figura 3.5](#) con le onde elettromagnetiche. Se un’onda elettromagnetica piana incide sullo schermo con le due fenditure, per il principio di Huygens le due piccole fessure possono essere viste come sorgenti puntiformi di onde elettromagnetiche circolari. Quando queste due onde circolari arrivano sullo schermo di misura interferiscono tra di loro, nel senso che, come abbiamo visto, in ogni punto x dello schermo i campi elettrici delle due onde si sommano. Allora l’energia totale, che produce un effetto fisico misurabile sullo schermo, non è pari alla somma delle energie dei singoli campi ma contiene in più un termine di interferenza.

Poiché la luce visibile è un’onda elettromagnetica la cui frequenza sta in un certo intervallo, l’effetto di interferenza può essere direttamente visto dall’occhio umano come un susseguirsi di zone chiare e scure sullo schermo. La stessa interferenza avviene con le onde sonore, e anche con quelle meccaniche che si propagano sulla superficie dell’acqua: ciascuno di noi ha sicuramente osservato almeno una volta come due onde circolari generate in due punti diversi sull’acqua (per esempio lasciando cadere due sassi), quando si incontrano si sovrappongono formando la tipica figura di interferenza.

In ciascun punto in cui si ha sovrapposizione degli effetti, i campi (elettrico, di pressione ecc.) delle due onde si sommano tra loro. A che cosa è dovuta la figura di interferenza? Precisamente al fatto che ciò che guardiamo, ascoltiamo o misuriamo è dovuto non all’ampiezza dell’onda in sé ma è un effetto dell’energia portata dal campo dell’onda in quel punto: il maggiore o minore annerimento dello schermo, il maggiore o minore livello sonoro sul timpano.

Evidentemente, poi, non ha senso chiedersi se l’onda piana incidente sullo schermo con due fenditure passi per l’una o per l’altra di queste: l’onda è un fenomeno

distribuito, un'increspatura che si propaga interessando regioni estese di spazio; è perciò lecito, viceversa, affermare che l'onda passi da entrambe le fenditure.

I neutroni però, e gli elettroni e le altre particelle, vengono sperimentalmente rilevati sempre in un punto, e questo li caratterizza per l'appunto come particelle. Nella fisica classica onde e particelle sono due entità contrapposte, entrambe presenti fianco a fianco a costituire l'ontologia del mondo. Entrambe possiedono proprie, esclusive caratteristiche. Una particella deve necessariamente passare da una delle due fenditure, non si può dividere in due per passare contemporaneamente da entrambe; un'onda viceversa, essendo un fenomeno delocalizzato, attraversa allo stesso tempo entrambe le fenditure.

Nella fisica quantistica queste certezze vengono meno. Le particelle, passando al di là dello schermo con due fenditure, producono una figura di interferenza tipica delle onde. Ma all'atto della misura esse vengono sempre e comunque rilevate in un punto preciso. Per questa ragione è stato coniato storicamente il termine *dualismo onda-particella* per descrivere questo ibrido comportamento della materia a livello fondamentale.

Secondo questo modo di vedere, sia la materia sia l'energia si comportano a livello fondamentale in alcune circostanze come onde e in altre circostanze come particelle. Quando rileviamo la presenza della particella in un punto si manifesta il comportamento corpuscolare, mentre quando constatiamo (indirettamente) un'interferenza si manifesta il comportamento ondulatorio.

In questo senso, secondo quanto propose per la prima volta Louis de Broglie nel 1924, a un oggetto dotato di massa può essere attribuita una lunghezza d'onda data da $\lambda = \frac{h}{p}$, dove p è il momento dell'oggetto e h è l'onnipresente costante di Planck. Si noti come la formula di de Broglie leghi il comportamento ondulatorio (lunghezza d'onda) a quello corpuscolare (momento); un legame espresso, guarda caso, mediante la costante di Planck.

Praticamente in tutti i testi che presentano l'argomento l'interferenza per l'esperimento delle due fenditure con particelle viene in effetti sempre calcolata in maniera puramente ondulatoria, utilizzando i metodi dell'ottica geometrica e il principio di Huygens anziché direttamente il formalismo della meccanica quantistica, soprattutto per una questione di immediatezza e semplicità pratica.

Tuttavia, ci sono delle differenze sostanziali tra il comportamento ondulatorio osservato nel caso quantistico rispetto al caso classico. La figura di interferenza in fisica quantistica è un fenomeno squisitamente statistico: una singola particella viene rilevata da una misura in un certo punto dello schermo di misura; solo ripetendo l'esperimento con un gran numero di particelle la figura comincia ad apparire – come nella [figura 3.4](#), e questo in accordo a una distribuzione di probabilità forgiata dalla preparazione iniziale, ossia dalle due fenditure. Questo è il primo punto importante da osservare circa lo stato quantistico.

Va puntualizzato chiaramente, dunque, che in realtà fisicamente *non esiste alcuna onda*.

La cosiddetta dualità onda-particella ha soprattutto un significato storico. Julian Schwinger, premio Nobel per la fisica nel 1965, ricorda in un suo testo:

Non ho mai pensato che questo semplice approccio ondulatorio fosse accettabile quale base generale per l'intero argomento.

E del resto questo punto di vista viene superato dal moderno formalismo della meccanica quantistica, introdotto da John von Neumann nella sua seminale opera *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* ("Fondamenti matematici della meccanica quantistica") già nel 1932.

Lo spazio di Hilbert

Il secondo punto importante è che comunque lo stato non può essere sempre raffigurato mediante una funzione $\psi(x,t)$ della variabile spazio (e del tempo).

L'espressione matematica dello stato va infatti scelta di volta in volta in dipendenza della situazione fisica che si analizza. Allo stesso modo che in fisica classica, infatti, per studiare un fenomeno fisico non prendiamo di fatto mai in considerazione tutti i dettagli. Piuttosto ne facciamo un modello fisico semplificato: consideriamo cioè una situazione fisica circoscritta nella quale studiamo alcune variabili che sono quelle di interesse, e non altre.

Per esempio, dell'elettrone può interessare solo il moto spaziale, solo lo spin, o entrambi. Per il moto spaziale ci occorre una funzione della posizione; nel caso dello spin abbiamo una variabile aleatoria discreta con due possibili valori, una versione quantistica del lancio della moneta. Il corrispondente stato sarà allora descrivibile mediante un vettore (algebrico) a due dimensioni: lo vediamo in dettaglio nel prossimo riquadro, dove facciamo appunto un confronto tra il caso continuo e quello discreto. Nel leggerlo si tenga all'occorrenza presente come riferimento il riquadro *Distribuzioni di probabilità* nel capitolo *Casualità*.

■ Lo stato nei casi continuo e discreto

Consideriamo nell'esperimento delle due fenditure la variabile continua posizione in una dimensione, la quale si può misurare mediante uno schermo di misura.

I valori di x da $-\infty$ a $+\infty$ sono tutti i possibili valori della grandezza

fisica in esame.

Per ogni possibile valore x chiamiamo $\psi(x)$ la corrispondente ampiezza di probabilità.

Abbiamo quindi una *funzione* $\psi(x)$ che, tralasciando per semplicità di scrivere la variabile tempo, rappresenta lo stato del sistema fisico. Lo stato $\psi = \psi(x)$ è in sostanza un insieme ordinato continuo di numeri, uno per ogni possibile valore della grandezza fisica, i quali danno le ampiezze di probabilità. Per la probabilità vale:

$$P(x, x+dx) = |\psi(x)|^2 \cdot dx$$

(regola di Born, versione continua)

dove la “somma” (in realtà l’integrale definito) del modulo quadrato di tutti i valori di ψ per ogni x , ossia l’area sotto la curva di $|\psi(x)|^2$, è pari a 1 (normalizzazione).

All’atto della misura della grandezza posizione si ottiene ogni volta uno dei possibili valori di x (autovalori) e di conseguenza lo stato si trasforma nel corrispondente autostato.

La conoscenza dello stato ψ espresso in relazione ai valori possibili di x permette inoltre di ricavare i possibili valori e la loro distribuzione di probabilità per le altre grandezze fisiche di cui teniamo conto nell’esperimento, come il momento e l’energia meccanica totale.

Consideriamo ora invece la componente S_z dello spin dell’elettrone secondo una direzione z arbitrariamente scelta, componente che si può misurare mediante un apparato di Stern-Gerlach.

I due valori $+1/2$ e $-1/2$ sono tutti i possibili valori della grandezza fisica in esame.

Chiamiamo $\psi(+1/2)$ l’ampiezza di probabilità corrispondente al primo possibile valore e $\psi(-1/2)$ l’ampiezza di probabilità corrispondente al secondo possibile valore.

Abbiamo quindi ora solo una *coppia ordinata* di valori reali positivi e minori di 1 che, ancora tralasciando il tempo, rappresenta lo stato del sistema fisico. Lo stato:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \psi\left(+\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

è in sostanza un insieme ordinato discreto di numeri, uno per ogni possibile valore della grandezza fisica, i quali forniscono le ampiezze di probabilità. Gli enti matematici costituiti da n elementi ordinati chiamati componenti – 2 nel nostro caso – (sui quali sono definite le operazioni di somma, prodotto per un numero, prodotto scalare, norma, e quant'altro) si chiamano in algebra “vettori”.

I vettori algebrici rappresentano una generalizzazione degli ordinari vettori geometrici – i quali si possono scrivere esattamente in quel modo elencandone le componenti secondo un sistema di assi cartesiani, e sui quali sono definite le stesse operazioni. Da notare che il fatto di scrivere le componenti in colonna, anziché in riga, è semplicemente una convenzione.

Per la probabilità vale:

$$P(+1/2) = |\psi(+1/2)|^2, \quad P(-1/2) = |\psi(-1/2)|^2$$

(regola di Born, versione discreta)

dove $|\psi|^2 = |\psi(+1/2)|^2 + |\psi(-1/2)|^2 = 1$ (normalizzazione).

All'atto della misura della grandezza componente dello spin lungo la direzione z si ottiene ogni volta uno dei possibili valori $+1/2$ o $-1/2$ (autovalori) e in conseguenza lo stato si trasforma nel corrispondente autostato.

La conoscenza dello stato ψ espresso in relazione ai possibili valori di S_z permette inoltre di ricavare la distribuzione di probabilità per i due possibili valori di tutte le altre variabili S_y per ogni direzione y .

In generale dunque lo stato è una struttura matematica costituita non da un solo valore numerico, bensì da almeno due valori discreti fino a un'infinità continua. Certamente non può che essere così, dato che la motivazione originaria nell'introdurre lo stato era quella di “elencare” le probabilità per tutti i possibili valori della variabile aleatoria in considerazione. Il passaggio intermedio attraverso l'ampiezza di probabilità si rende necessario per spiegare il fenomeno dell'interferenza. Questo passaggio intermedio però fornisce molto di più, perché dallo stato si possono ricavare le distribuzioni di probabilità anche delle altre grandezze fisiche, oltre che di quella di partenza.

Ribadiamo, a scampo di equivoci, qual è il significato della normalizzazione dello stato: $|\psi|^2 = 1$ per definizione vuol dire che è pari 1 la somma (integrale ossia area sotto la curva per il caso continuo) dei moduli quadrati di *tutti* i valori (discreti o continui) che “formano” lo stato.

Per diverse situazioni fisiche, dunque, diversa sarà la forma matematica del corrispondente stato; il quale comunque deve sempre essere completo, ossia deve fornire ogni informazione su tutte le variabili prese in considerazione in quella situazione fisica.

Ma anche nella medesima situazione fisica lo stato ammette formulazioni alternative, può essere cioè espresso in funzione degli autovalori della grandezza fisica che si vuole prendere come riferimento. Nel caso delle due fenditure come stato si può in maniera del tutto equivalente prendere una funzione $\psi(p,t)$ della variabile momento – che altro non è che la trasformata di Fourier della $\psi(x,t)$. Nel caso dello spin, il vettore a due componenti che rappresenta lo stato si può esprimere in funzione degli autostati della componente in qualunque direzione, come vedremo in dettaglio tra poco.

Ancora: finora abbiamo preso in considerazione una sola particella (per semplicità in una dimensione spaziale). Se il sistema fisico preso in esame è costituito da n particelle, lo stato per la parte spaziale deve essere una funzione di $3n$ coordinate spaziali, o $3n$ componenti di momento: ben difficile da identificare come un'onda nello spazio fisico tridimensionale.

Si conferma quindi che lo stato non ha in generale una forma matematica prestabilita, tanto meno quella di un'onda nello spazio. Per rappresentare lo stato, a seconda dei casi bisogna per esempio prendere: una funzione di una variabile continua (moto spaziale della particella), una coppia ordinata di valori discreti (spin della particella), una coppia ordinata di funzioni di una variabile (moto spaziale e spin), o ancora tutto questo con più variabili continue e più variabili discrete se considera un sistema fisico in tre dimensioni e composto da un numero di particelle maggiore di uno.

Ovviamente, nei casi visti e in tutti quelli che si possono presentare gli stati devono avere delle precise caratteristiche comuni per poter essere tali: sicuramente devono poter essere moltiplicati per un numero, devono poter essere sommati, e se ne deve poter calcolare il modulo quadrato (chiamato anche *norma*).

Un insieme di elementi che soddisfa questi requisiti, e altri ancora, si chiama *spazio di Hilbert* – dove il termine “spazio” è inteso qui come sinonimo di “insieme”. Si tratta quindi di un insieme di elementi in cui vengono definite delle operazioni in un certo modo.

Lo spazio di Hilbert è uno spazio lineare, il che significa semplicemente che dati due elementi qualunque ψ_1 e ψ_2 anche la loro *combinazione lineare* (generalizzazione della somma)

$$c_1 \cdot \psi_1 + c_2 \cdot \psi_2$$

è un elemento – dove c_1 e c_2 sono coefficienti moltiplicativi qualunque.

Lo stato quantistico è in definitiva un elemento di uno spazio di Hilbert che sia normalizzato, il cui modulo quadrato sia cioè posto pari a 1, e viene chiamato anche

vettore di stato.

Ma oltre a quelle accennate, lo stato deve presentare una caratteristica veramente particolare, dovuta al fatto che deve avere una fase. Tuttavia, il semplice ricorso a funzioni periodiche come quelle sinusoidali, per le quali la fase è già intrinseca, non è possibile nel caso generale. Bisogna adottare un meccanismo di fase universale per mezzo del quale le possibili alternative in un sistema fisico, ossia i possibili valori di una grandezza fisica come le posizioni continue x o i due valori discreti corrispondenti a “spin up” e “spin down”, interferiscano tra di loro.

Ciò può avvenire – e in maniera del tutto generale – se i valori degli stati, ovvero dei coefficienti che li moltiplicano, non sono numeri reali bensì *numeri complessi*, dotati di modulo e fase. E questo è il terzo punto importante.

Numeri complessi

I numeri reali, che essendo associati a delle misure sono rappresentabili come punti di una retta ossia in una dimensione, possono essere positivi o negativi; ma questo non è sufficiente per dare gli effetti di interferenza. I segni + e – esprimono una relazione reciproca tra due numeri (i quali hanno segno uguale o segno diverso), che possiamo anche chiamare relazione fase ma che è limitata a due sole possibilità. Ci occorrono, intuitivamente, anche tutte le possibilità intermedie, e quindi in sostanza una variabile in più.

I numeri complessi, appunto, sono un'estensione dei reali che da una dimensione va in due, per cui sono rappresentabili come punti di un piano. Poiché il piano comprende la retta, i numeri complessi comprendono i numeri reali che ne costituiscono un sottoinsieme ossia un caso particolare.

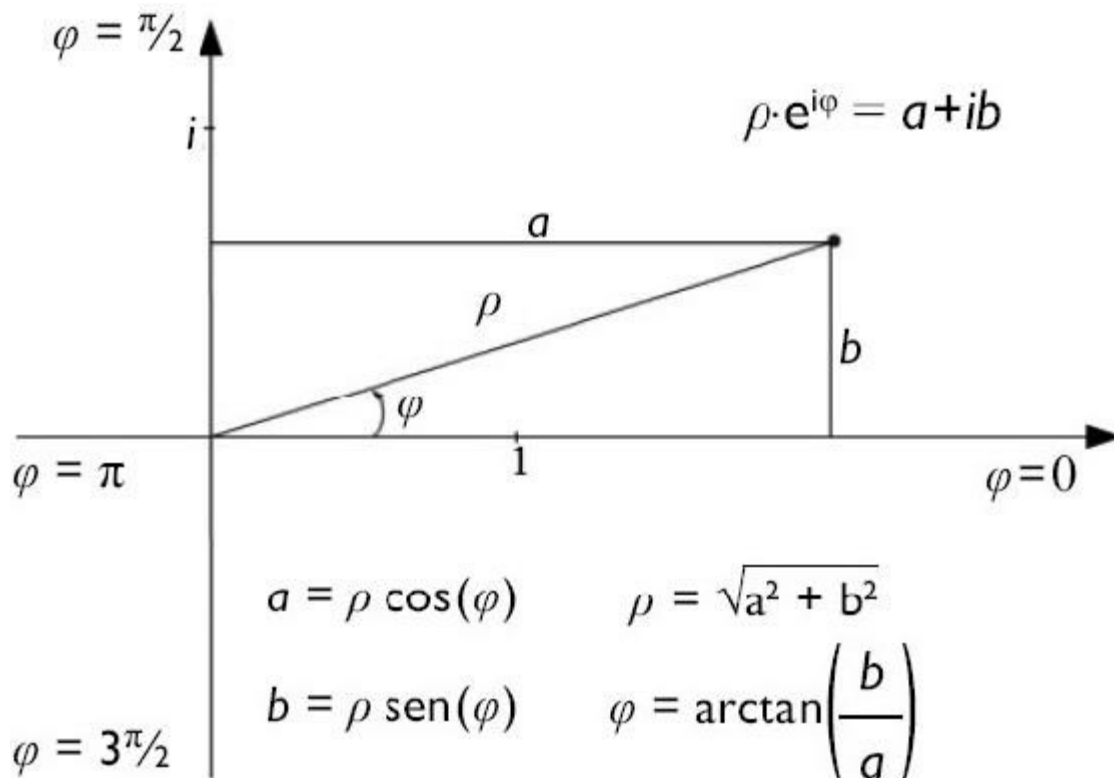


Figura 3.8 – Numeri reali e numeri complessi.

Come illustrato nella [figura 3.8](#), un numero complesso è definito da *due* valori reali: il modulo e la fase, e per questa ragione è rappresentato in due dimensioni. Il modulo ρ è un numero reale sempre positivo che esprime la lunghezza del segmento orientato che va dall'origine al punto del piano che rappresenta il numero complesso; la fase φ è un numero reale compreso nell'intervallo $(-\pi, \pi)$, ovvero $(0, 2\pi)$, che rappresenta l'angolo che questo segmento orientato forma con l'asse delle x .

Naturalmente, occorre completare la definizione del campo numerico complesso aggiungendo le operazioni di somma e di prodotto, così da rispettare le proprietà formali di queste operazioni e in maniera tale che esse si riducano alle corrispondenti, consuete operazioni nel caso particolare dei numeri reali. In sostanza: la somma di due numeri complessi coincide con quella dei corrispondenti vettori nel piano, mentre il prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli e per fase la somma delle fasi.

I numeri reali sono allora casi particolari di numeri complessi, quelli che giacciono sull'asse delle x e che quindi hanno fase pari a 0 (reali positivi) oppure a π (reali negativi). Per i numeri complessi non esiste un segno intrinseco, bensì la sua generalizzazione che è la fase φ , che è esattamente ciò di cui abbiamo bisogno: tra due numeri complessi non c'è semplicemente una differenza di segno, bensì una più generale differenza di fase, la quale può assumere tutti i valori nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ ovvero $(0, 2\pi)$.

Il modulo di un numero complesso qualunque è un numero reale positivo (viene

“eliminata” la fase), così come pure il modulo di un numero reale qualunque è un numero reale positivo (viene “eliminato” il segno). Vediamo ora che scrivere $|\psi|^2$, indicando che va eseguita l’operazione di modulo prima di quella di elevazione al quadrato, è la forma più generale: nel campo reale, prendere il modulo prima di elevare al quadrato sarebbe superfluo, ma così non è nel campo complesso.

I particolari numeri complessi che hanno fase $\pi/2$ e $-\pi/2$, ossia quelli che stanno sull’asse perpendicolare all’asse reale, si dicono *immaginari*. Il particolare numero immaginario che ha modulo 1 e fase $\pi/2$ è l’unità immaginaria e si indica con il simbolo i . Mediante le operazioni algebriche definite sul campo dei complessi si trova che $i = \sqrt{-1}$: con l’estensione del campo numerico dai reali ai complessi viene perciò rimossa la limitazione di non poter definire la radice quadrata di un numero negativo. Questo in matematica è di enorme importanza e conduce tra le tante altre cose a un importantissimo risultato: il teorema fondamentale dell’algebra, il quale afferma che nel campo complesso un’equazione algebrica di grado n ha sempre n soluzioni, distinte o coincidenti.

Come riportato nella [figura 3.8](#), usando l’unità immaginaria i ogni numero complesso può essere scritto in due forme equivalenti:

- nella forma $a + ib$, dove a e b sono numeri reali (denominati, rispettivamente, parte reale e parte immaginaria del numero complesso);
- nella forma $\rho \cdot e^{i\varphi}$, dove ρ e φ , numeri reali, sono rispettivamente il modulo e la fase; questa seconda forma è particolarmente utile, appunto, trattando della fase, e il lettore la può anche vedere semplicemente come una notazione.

In entrambe queste forme i numeri complessi seguono le stesse regole dei numeri reali per le operazioni di somma e prodotto, per l’elevazione a potenza e così via, tenendo conto che vale:

$$i^2 = -1$$

Attenzione, quindi. Non bisogna lasciarsi ingannare dal significato quotidiano di termini quali “reale”, “immaginario”, “complesso”, termini che hanno più che altro una giustificazione storica: dal punto di vista matematico numeri reali e numeri complessi sono entrambi ben definiti e quindi, come tutti gli enti della matematica, entrambi “esistono” nell’ambito di questa disciplina. Oltretutto dal punto di vista concettuale è proprio la definizione rigorosa dei numeri reali che presenta delle difficoltà, a causa del fatto che nell’estendere l’insieme dei numeri dai razionali ai reali si introduce il concetto piuttosto profondo di continuità. Al contrario, l’estensione dai reali ai complessi non presenta problemi di sorta, dato che un numero complesso altro non è che una coppia ordinata di numeri reali.

L’introduzione dei numeri complessi comporta un notevole arricchimento per la

matematica e, non da ultimo, conduce a costruzioni di grande bellezza, come la teoria delle funzioni analitiche. Citiamo qui la celebre formula

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

che lega tra loro cinque tra i più importanti numeri della matematica: lo zero 0, l'unità reale 1, l'unità immaginaria i , il numero di Nepero e , il rapporto tra circonferenza e diametro π . La formula molto semplicemente altro non è che l'espressione del numero -1 mediante la seconda delle forme citate sopra. Il modulo è 1 e la fase è π .

Invece, l'applicazione al mondo fisico è diversa per i due campi numerici: le grandezze fisiche misurate sono sempre numeri reali e i numeri complessi forniscono una sorta di modello sottostante. In maniera immaginifica potremmo dire che la retta reale è un po' la punta di un iceberg, il piano complesso; punta che emerge a dare i risultati delle misure di grandezze fisiche. Per cui anche nelle scienze l'apporto dei numeri complessi è ricchissimo, e il loro utilizzo pratico spazia dalla fisica alla chimica, dall'elettronica alla statistica, e in altre discipline ancora.

Se gli stati sono a valori complessi, o sono moltiplicati per numeri complessi, quando li sommiamo (sovrapposizione) e poi ne prendiamo il modulo quadrato (regola di Born), ecco che compare il termine di interferenza dipendente dalla differenza di fase. Naturalmente, come questo avviene in dettaglio va visto caso per caso, dato che gli stati possono avere forme matematiche diverse.

Ma in ogni caso poiché i valori delle grandezze fisiche, ossia tutte le cose che nel mondo che ci circonda possono essere espresse quantitativamente, sono *sempre* dei numeri reali – come 1,735, $\sqrt{2}$, π , 92, e così via – dobbiamo concludere che lo stato quantistico, essendo complesso, non può avere di per sé un significato fisico.

Si conferma ancora che lo stato quantistico è soltanto un oggetto matematico; di fisico c'è solamente il risultato delle misure: una variabile aleatoria la cui distribuzione di probabilità – data da numeri reali! – si deduce direttamente dallo stato per mezzo della regola di Born.

Il fatto che va messo in evidenza è che in meccanica quantistica i numeri complessi hanno un significato fondamentale. In altri campi della scienza ci si può benissimo limitare ai reali ed evitare l'impiego dei numeri complessi, in quanto questi costituiscono semplicemente un ausilio di calcolo, per quanto utile ed elegante.

Un esempio tipico è il comunissimo impiego dei numeri complessi in elettronica ed elettrotecnica per rappresentare correnti e tensioni in regime sinusoidale (i cosiddetti *fasori*); una tecnica che facilita enormemente i calcoli ma che non è intrinseca: le grandezze sinusoidali non sono di per sé complesse, quella è solo una comoda rappresentazione di cui volendo si può fare a meno.

In meccanica quantistica invece non si può fare a meno dei numeri complessi, essi sono intrinsecamente parte della teoria. Lo stato quantistico è complesso in linea di

principio. Questa differenza ricorda da vicino quella già ben evidenziata riguardante la probabilità: un fatto dovuto alle nostre limitazioni in fisica classica, ma una componente intrinseca in meccanica quantistica. In questa teoria ci sono quindi strutturalmente delle componenti matematiche che non hanno una controparte fisica.

Il termine di interferenza dipende da un angolo φ attraverso la funzione trigonometrica coseno la quale assume tutti i valori reali che vanno da -1 a $+1$. Le probabilità corrispondenti alle due alternative non vengono semplicemente sommate: c'è un termine aggiuntivo che grazie all'uso dei numeri complessi può variare con continuità da un minimo a un massimo passando per lo zero. In questo tipico andamento risiede il significato generale del fenomeno che abbiamo chiamato interferenza, ed è ciò che difatti si riscontra sperimentalmente.

Nel caso concreto della “funzione d’onda” continua $\psi(x)$ a valori complessi, la fase relativa φ si traduce poi nella corrispondente fase delle funzioni sinusoidali e quindi in definitiva nelle variazioni spaziali $\cos(\varphi(x))$ sullo schermo di misura, come abbiamo già visto. L’interferenza è in tal caso rilevabile in maniera spaziale e geometrica quando le particelle impattano una dopo l’altra sullo schermo stesso.

Ma è estremamente interessante analizzare il ruolo della fase relativa nel caso concreto di una variabile discreta: lo spin dell’elettrone, il sistema quantistico più elementare possibile. Nel prossimo riquadro scenderemo nei dettagli di questo sistema, dettagli del resto piuttosto semplici; vedremo così che il fenomeno che abbiamo chiamato interferenza si manifesta in quel caso in una maniera completamente diversa, ma sempre riconducibile a una relazione di fase tra ampiezze di probabilità.

Non bisogna lasciarsi distrarre dal fatto che lo spin è una grandezza senza un esatto corrispondente classico; si tratta semplicemente di una grandezza fisica, la quale assume valori discreti. Utilizzeremo frequentemente lo spin nel seguito del libro, perché è più semplice da trattare rispetto alle grandezze continue e soprattutto mette in evidenza fondamentali aspetti concettuali che altrimenti resterebbero celati. Spesso non sarà necessario dare un’espressione esplicita degli stati di spin, perché è sufficiente indicarli con un simbolo.

Ricordiamo che una componente dello spin dinamico S dell’elettrone, o di qualunque altra particella con spin intrinseco $s = 1/2$, può essere misurato con un apparato di Stern-Gerlach disposto secondo qualunque direzione spaziale r si voglia. Come visto nel paragrafo *Lo spin* del capitolo *Quantizzazione*, per ciascuna direzione r abbiamo una diversa grandezza fisica S_r per la quale i risultati della misura costituiscono una variabile aleatoria con due possibili valori: $+1/2$ e $-1/2$.

È immediatamente chiaro il significato della notazione, che useremo spesso:

$$\psi_{+x} \psi_{-x} \psi_{+y} \psi_{-y} \psi_{+z} \psi_{-z}$$

per indicare gli autostati di spin dati da, nell’ordine, “spin su” e “spin giù” in tre

direzioni corrispondenti a una terna di assi cartesiani ortogonali.

Possiamo ora mostrare che anche gli stati di spin producono il fenomeno dell'interferenza, e che per farlo devono quindi essere dotati di una fase.

■ Interferenza di stati di spin

Consideriamo un esempio molto significativo, quale è lo stato di spin:

$$\psi_C = (1/\sqrt{2}) \cdot (\psi_{+z} + e^{i\varphi} \psi_{-z})$$

Complicato? Vediamo di che cosa si tratta. Abbiamo preso due stati e li abbiamo sovrapposti, ossia sommati moltiplicandoli prima per dei coefficienti. Gli stati in questione sono gli autostati della componente S_z dello spin, ψ_{+z} e ψ_{-z} : quando l'elettrone si trova in uno di questi due stati, misurando la componente z dello spin si ottiene con certezza sempre lo stesso risultato, rispettivamente l'autovalore $+1/2$ e l'autovalore $-1/2$. Per cui esplicitamente:

$$\psi_{+z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \psi_{-z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

I due coefficienti sono i numeri complessi

$$c_1 = 1/\sqrt{2} \quad \text{e} \quad c_2 = (1/\sqrt{2}) \cdot e^{i\varphi}$$

che hanno entrambi modulo pari a $1/\sqrt{2}$, e con ciò provvedono a normalizzare lo stato composto ψ_C il quale viene ad avere modulo quadrato pari a 1 come dev'essere. Il primo coefficiente ha fase 0, e si tratta quindi di un numero reale positivo; il secondo coefficiente ha fase φ , la quale rappresenta pertanto la fase relativa tra i due stati che vengono sovrapposti. Si noti a tal proposito che è la fase relativa tra due stati ad avere un effetto fisico, mentre una fase globale che moltiplica uno stato non ne ha alcuno.

Che caratteristiche ha questo stato composto ψ_C ? Come varia al variare della fase relativa φ , questo grado di libertà o dimensione in più che abbiamo aggiunto con l'impiego dei numeri complessi?

Si verifica subito intanto che effettivamente è sempre $|\psi_C|^2 = 1$ qualunque

sia φ . Come anche nel caso continuo, a prescindere dalla relazione di fase che c'è tra i due stati sovrapposti, lo stato risultante deve avere, come ogni stato, norma unitaria. È tuttavia proprio la fase relativa che cambia le cose. In termini espliciti lo stato ψ_C si può scrivere così:

$$\psi_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ e^{i\varphi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ossia come insieme ordinato delle ampiezze di probabilità corrispondenti ai due possibili valori di S_z .

In altre parole, i due coefficienti altro non sono che le ampiezze di probabilità:

$$\psi(+z) = c_1 = 1/\sqrt{2} \quad \psi(-z) = c_2 = (1/\sqrt{2}) \cdot e^{i\varphi}$$

e di conseguenza le probabilità associate ai due possibili valori, per la regola di Born, sono date da:

$$P(+z) = |c_1|^2 = 1/2 \quad P(-z) = |c_2|^2 = 1/2$$

I due valori sono cioè equiprobabili, esattamente come avviene per “testa” e “croce” in una moneta classica. E questo, osservazione importantissima, qualunque sia il valore della fase φ , in quanto prendendo il modulo dei coefficienti questa fase viene eliminata. Ciò vuol dire che ci sono infiniti stati che forniscono la distribuzione di probabilità appena vista: uno per ogni valore di φ . E sembrerebbero indistinguibili, poiché la distribuzione di probabilità è l'unica cosa che è possibile rilevare sperimentalmente, mediante numerose ripetizioni dell'esperimento.

In realtà gli stati ψ_C al variare di φ non rappresentano uno stesso stato ma sono stati diversi. Ciò rimane celato se ci limitiamo alla direzione z – quella corrispondente ai due autostati che vengono sovrapposti – ma risulta evidente se misuriamo in direzioni ortogonali a z .

Per un assunto fondamentale, lo stato quantistico è completo; perciò, dall'espressione di un qualsivoglia stato, come ψ_C , è possibile ricavare la distribuzione di probabilità per i due possibili risultati della misura dello spin secondo *ogni* direzione spaziale. Il procedimento matematico per farlo è

esattamente definito dalla teoria. Ma qui ci interessano più che altro gli aspetti concettuali, per cui forniremo direttamente i risultati. Per alcuni valori notevoli per la fase relativa vediamo quindi cosa succede se prendiamo in considerazione direzioni ortogonali a z .

Per $\varphi = 0$ si ha

$$\psi_C = (1/\sqrt{2}) \cdot (\psi_{+z} + \psi_{-z}).$$

e per la misura secondo la direzione x si trova:

$$P(+x) = 1 \quad P(-x) = 0$$

dunque lo stato in esame altro non è che l'autostato ψ_{+x} della grandezza S_x .

Analogamente si trova:

$$\text{Per } \varphi = \pi/2: \quad \psi_C = (1/\sqrt{2}) \cdot (\psi_{+z} + i\psi_{-z}) \quad = \psi_{+y}$$

$$\text{Per } \varphi = \pi: \quad \psi_C = (1/\sqrt{2}) \cdot (\psi_{+z} - \psi_{-z}) \quad = \psi_{-x}$$

$$\text{Per } \varphi = 3\pi/2: \quad \psi_C = (1/\sqrt{2}) \cdot (\psi_{+z} - i\psi_{-z}) \quad = \psi_{-y}$$

In generale, l'angolo φ individua nel piano x - y una direzione orientata, come si vede nella [figura 3.9](#).

Consideriamo allora φ fissato ed eseguiamo su un elettrone nello stato ψ_C delle misure di spin; essendo φ la direzione dell'autostato si ottiene:

- in direzione φ con certezza il valore $+1/2$;
- in direzione opposta a φ con certezza il valore $-1/2$;
- in direzione perpendicolare a φ i due possibili valori sono equiprobabili.

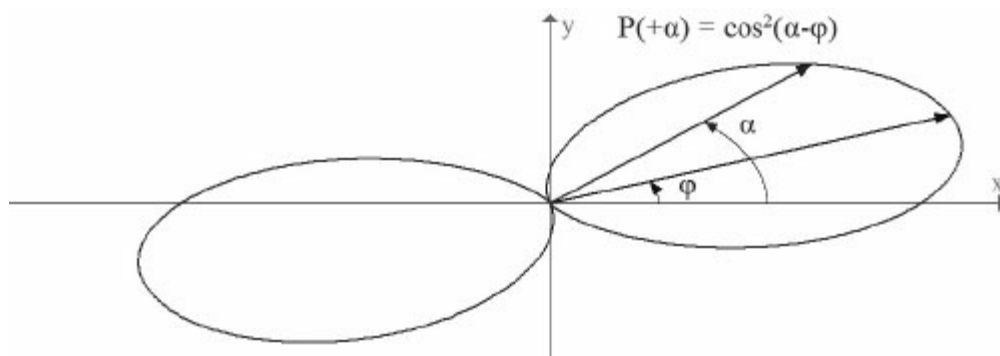


Figura 3.9 – Significato della fase relativa per lo spin.

E misurando – sempre con φ fissato – lungo una generica direzione orientata α nel piano x - y , la distribuzione di probabilità è data da:

$$P(+\alpha) = \cos^2(\alpha - \varphi) \quad P(-\alpha) = \sin^2(\alpha - \varphi)$$

dove vale sempre

$$P(+\alpha) + P(-\alpha) = 1$$

Nella [figura 3.9](#) è tracciato l'andamento di $P(+\alpha)$ in funzione di α con φ fissato. Si nota che il valore passa con continuità

- da un massimo pari a 1 in direzione φ
- a un minimo pari a 0 in direzione $\varphi + \pi/2$,
- poi a un massimo pari a 1 in direzione $\varphi + \pi$
- e a un minimo pari a 0 in direzione $\varphi + 3\pi/2$,

descrivendo una figura a forma di otto, la quale gioca il ruolo di figura di interferenza per il caso in esame.

È molto interessante poi che variando la fase relativa φ contenuta nello stato ψ_C la figura a otto ruota nel piano, spostando le posizioni di massimo e minimo.

In sintesi: è possibile sovrapporre i due autostati della grandezza S_z (le due possibili alternative che il sistema fisico ha rispetto alla misura dello spin in direzione z) secondo una modalità descrivibile dicendo che essi differiscono per una fase φ , modalità che chiamiamo interferenza. L'effetto di questa interferenza è che si viene ad avere un *pattern* di massimi e minimi nel piano x - y come risultato della misura di spin lungo tutte le direzioni nel piano.

Ora, il fatto è che quanto descritto è esattamente ciò che avviene sperimentalmente, e la teoria deve dunque renderne conto. Esattamente come accade per l'esperimento delle due fenditure, è evidente che senza l'impiego dei numeri complessi ciò non sarebbe possibile.

Il mistero di Feynman

Effetti fisici all'apparenza molto diversi tra loro e peculiari dell'ambito quantistico, come quelli che si ottengono sovrapponendo stati di posizione da una parte e stati di spin dall'altra, hanno in realtà un denominatore comune che permette di spiegarli. Questo

denominatore comune è il fatto che il vettore di stato, pur avendo forma matematica diversa in circostanze diverse, è in ogni caso *complesso* (più precisamente: è un elemento di uno spazio di Hilbert complesso).

Feynman certamente aveva ragione: il fenomeno dell'interferenza quantistica è un autentico mistero. Certamente lo è poiché esso è inserito in quel misterioso quadro che è la casualità vigente in ambito quantistico: casualità che per l'appunto non è totale, bensì regolata dai valori complessi dell'ampiezza di probabilità assegnata a ogni possibile valore della variabile aleatoria in esame.

In un certo senso, quindi, l'utilizzo dello stato complesso mitiga questo mistero, potremmo anzi dire che lo "spiega". Tanto più che, appunto, lo fa per versioni dell'interferenza fisicamente molto diverse tra loro. Si potrebbe addirittura essere tentati di dedurre da questo che lo stato quantistico abbia un suo valore ontologico, che "esista" nonostante non sia fisicamente misurabile, nonostante sia complesso. Che esso "viva" in un mondo con un grado di libertà in più che rimane precluso all'esperienza diretta. Tuttavia rimane ben difficile immaginare lo stato quantistico come qualcosa di più concreto di un semplice strumento matematico.

Anche in ambito classico lo stato è uno strumento matematico, e anche lì assume forme diverse. Ma nessuno potrebbe dubitare che esso esista realmente, in quanto quelle che vanno a farne parte sono grandezze fisiche misurabili e deterministiche.

Eppure, in assenza di variabili nascoste ci deve pur essere qualcosa che "guidi" la singola particella in una maniera tale che, benché la sua posizione misurata appaia del tutto casuale, emerga poi un *pattern* preciso ripetendo l'esperimento per molte particelle. In questo consiste il mistero di Feynman.

Lo stato fisico di un neutrone, a prescindere da come viene reso matematicamente, deve essere diverso nella situazione in cui sono aperte entrambe le fenditure rispetto alla situazione in cui è aperta solo una di esse. Ma cos'è lo stato di un sistema fisico se non la collezione delle sue proprietà? E quantisticamente le uniche proprietà dinamiche che possiamo attribuire alla particelle sono delle probabilità di trovare all'atto delle misura i possibili valori delle grandezze. Per dirla con il filosofo della scienza Karl Popper, sembrerebbe che in ambito quantistico i sistemi fisici più che proprietà posseggano "propensioni" (*propensities*). è una via di mezzo ontologica tra l'idea che un sistema abbia proprietà fisiche definite, preesistenti e indipendenti dalla misura, e l'idea che non ne abbia affatto finché una qualche misura non venga eseguita.

Per via della casualità, tuttavia, la stessa attribuzione del concetto di stato è oggetto di interpretazione. A che cosa si riferisce esattamente lo stato in meccanica quantistica? Alla singola particella o all'insieme statistico di particelle su cui eseguiamo esperimenti identici? Ognuna delle due opzioni ha i suoi argomenti e i suoi sostenitori.

Fantasm

Concludiamo questo capitolo osservando che in realtà anche in fisica classica l'insieme degli stati è formalmente uno spazio lineare, reale naturalmente.

Sappiamo che lo stato di una particella è dato dalla sua posizione e dalla sua velocità; è del tutto evidente allora che, trattandosi di vettori ordinari, una combinazione lineare di posizioni è ancora una posizione, e la stessa cosa vale per la velocità. Gli stati classici si possono moltiplicare per costanti reali arbitrarie e sommare tra loro, ottenendo ancora un possibile stato.

Ma in fisica classica non si ha interferenza tra gli stati, perché non c'è una relazione di fase tra gli stati che si sommano né una regola di Born che legghi lo stato risultante alla misura fisica. In questo senso, fisicamente gli stati classici non hanno nulla a che vedere l'uno con l'altro.

C'è poi un'altra notevole differenza. Poiché la fisica classica è deterministica, una particella che si trova in un assegnato stato possiede sempre un valore preciso delle grandezze fisiche che lo definiscono (posizione e velocità, per esempio), e naturalmente di tutte le altre. Potremmo quindi dire che gli stati classici sono sempre autostati della corrispondente grandezza, e naturalmente di tutte le altre. Una combinazione lineare di stati è da questo punto di vista uno stato come gli altri, con queste stesse caratteristiche.

Dal momento che invece in fisica quantistica abbiamo a che fare con variabili aleatorie, ecco che gli autostati sono in un certo senso speciali: solo quando l'elettrone si trova nell'autostato ψ_{+z} si ottiene con certezza il risultato $\frac{1}{2}$ – il corrispondente autovalore – misurando S_z . Una combinazione lineare degli autostati ψ_{+z} e ψ_{-z} , come quella che nel riquadro *Interferenza di stati di spin* abbiamo chiamato ψ_C , è senz'altro ancora uno stato della particella, ma non è un autostato di S_z . All'atto della misura troveremo – con probabilità 50% – uno e uno solo dei due autovalori $\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$, e di conseguenza la particella verrà proiettata nell'autostato ψ_{+z} oppure in quello ψ_{-z} .

Entrambe queste fondamentali differenze giustificano la particolare valenza semantica assunta dal termine “sovrapposizione” in ambito quantistico, e chiariscono inoltre il motivo per cui lo stesso termine non viene usato per gli stati classici.

Se guardati con occhi classici (e magari anche romantici), gli autostati sarebbero quindi i vecchi, sicuri amici che formano il solido mondo reale, mentre uno stato che sia sovrapposizione di due autostati potrebbe allora apparire come qualcosa di evanescente: un fantasma posto in un limbo irreali in bilico tra due diverse realtà. Ma di fatto non c'è un vero fondamento in questo modo di vedere: una volta preso atto della casualità, molto prosaicamente lo stato quantistico è ciò che fornisce la distribuzione di probabilità dei possibili valori della grandezza fisica, qualunque essa sia numericamente.

Questa circostanza ha evocato un suggestivo significato che viene frequentemente attribuito alla sovrapposizione quantistica, e che però non è corretto né dal punto di vista fisico né da quello filosofico: si dice per esempio che una particella si trova contemporaneamente in diverse posizioni spaziali. In realtà non abbiamo alcuna maniera

di dire *dove* la particella si trovi finché non eseguiamo una misura di posizione; non ha senso neanche porsi la domanda. Quello che possiamo dire, e che certamente è in contrasto con la fisica classica, è invece che diverse posizioni spaziali hanno probabilità non nulla di essere quelle in cui la particella viene trovata all'atto della misura.

La particella non è affatto contemporaneamente “qui” e “là”; piuttosto può essere trovata o “qui” o “là” con una data probabilità. La questione in fondo, a parte l'interferenza, non è molto diversa per una variabile aleatoria classica. Quando la moneta sta ruotando in aria certamente non ci chiediamo che valore abbia, tanto meno affermiamo che è contemporaneamente “testa” e “croce”; sappiamo invece che ognuno dei due possibili valori ha probabilità $\frac{1}{2}$ di verificarsi quando la moneta si ferma su un tavolo.

Capitolo 4

EVOLUZIONE

L'equazione di Schrödinger

Appurato che nel modello della meccanica quantistica vanno utilizzati i numeri complessi, non stupisce il fatto che la stessa equazione di Schrödinger sia complessa, nel senso che un suo coefficiente è moltiplicato per il numero complesso i , l'unità immaginaria. Ciò risulta necessario affinché $|\psi(t)|^2$ sia normalizzato a 1 non solo in un particolare istante bensì per tutti gli istanti di tempo, cosa imprescindibile dato il suo significato probabilistico.

Ci sono quindi in realtà svariati motivi per i quali lo stato quantistico deve essere complesso, e quelli citati – interferenza e normalizzazione – sono i più importanti e immediati.

Sappiamo che matematicamente gli stati quantistici formano un insieme, chiamato spazio di Hilbert, su cui sono definite le operazioni di somma tra stati e di moltiplicazione di uno stato per un numero complesso.

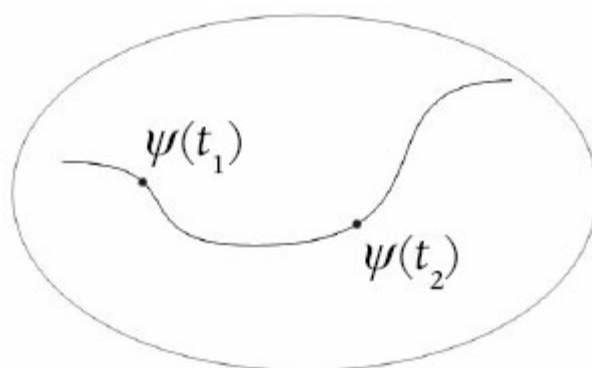


Figura 4.1 – Evoluzione temporale dello stato.

Possiamo graficamente rappresentare gli stati come punti di questo insieme, come nella [figura 4.1](#) dove consideriamo la trasformazione dello stato al passare del tempo. Se all'istante t_1 il sistema fisico è descritto da uno stato $\psi(t_1)$, a un istante successivo t_2 esso sarà descritto da uno stato $\psi(t_2)$, generalmente diverso.

Il fatto piuttosto notevole riguardo l'evoluzione dinamica dello stato quantistico è

che essa, al pari di quella dello stato classico, è perfettamente deterministica! La probabilità infatti non ha niente a che fare con l'evoluzione temporale: l'oggetto matematico che rappresenta lo stato viene trasformato da un istante t_1 a un istante t_2 in maniera del tutto determinata. Solo all'atto della misura, anzi ripetendo varie volte una misura nelle stesse condizioni sperimentali, si constata la casualità.

L'ampiezza di probabilità, espressione del fatto che le grandezze fisiche sono variabili aleatorie (come la posizione della particella che va a impattare sullo schermo di misura nell'esperimento delle due fenditure), è essa stessa invece soggetta a un'evoluzione perfettamente deterministica (come avviene tra i due schermi in assenza di misurazioni).

La legge fisica che opera l'evoluzione temporale dello stato è l'equazione di Schrödinger, cui abbiamo fatto cenno nel paragrafo *Il modello della meccanica quantistica*. Notiamo che l'equazione di Schrödinger è lineare – nel senso che, se ψ_A e ψ_B sono due diversi stati:

$$\begin{aligned} & \text{evoluzione di } [c_1\psi_A(t) + c_2\psi_B(t)] = \\ & = c_1 \cdot [\text{evoluzione di } \psi_A(t)] + c_2 \cdot [\text{evoluzione di } \psi_B(t)] \end{aligned}$$

Si può applicare cioè una sorta di “proprietà distributiva” per l'evoluzione temporale. Ciò del resto vale anche per la legge dinamica in meccanica e in elettromagnetismo classici.

■ La struttura dell'equazione

Illustriamo qui in maniera sintetica la struttura dell'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t)$$

Consideriamo al tempo generico t un incremento temporale molto piccolo (“infinitesimo”) dt , e sia $d\psi(t)$ la corrispondente variazione che subisce lo stato.

Ci interessa il rapporto tra questa variazione e l'intervallo temporale in cui avviene:

$$\frac{d\psi(t)}{dt}$$

ossia quella che in matematica si chiama *derivata*.

La legge fisica rappresentata dall'equazione di Schrödinger ci dice che questa derivata, moltiplicata per la costante complessa $i\hbar$ è uguale a $H\psi(t)$ – ossia allo stato $\psi(t)$ trasformato da delle operazioni matematiche rappresentate dal simbolo H (operatore Hamiltoniano). Queste operazioni si stabiliscono considerando l'energia totale (cinetica più potenziale) della particella. Del motivo per cui compare il fattore moltiplicativo complesso i abbiamo già detto; la presenza della costante di Planck ridotta \hbar non sorprende, dato che essa rappresenta il “fattore di scala” dell'ambito quantistico.

In maniera assolutamente analoga al caso classico, dato lo stato a un istante iniziale l'equazione di Schrödinger permette di ricavare lo stato a ogni altro istante di tempo, futuro o passato. Lo stato si evolve da $\psi(t_1)$ a $\psi(t_2)$ in maniera continua passando per tutti gli stati intermedi lungo una curva definita nello spazio di Hilbert, come nella [figura 4.1](#).

Bisogna sempre ricordare che naturalmente questa curva nello spazio di Hilbert è solo una rappresentazione geometrica formata dai punti che rappresentano graficamente gli stati successivi nel corso dell'evoluzione temporale. Tale curva non va quindi confusa con una traiettoria nello spazio fisico, che è tutt'altra cosa e che sappiamo che per una particella in ambito quantistico non può essere definita.

Il problema della misura

Al pari dello stato in sé, anche la sua evoluzione temporale – data dall'equazione di Schrödinger – non è osservabile direttamente. Abbiamo uno stato che contiene tutte le informazioni sul sistema fisico in esame, il quale varia nel tempo secondo una legge deterministica. Ma solo quando a un certo istante eseguiamo la misura di una grandezza fisica otteniamo un valore per questa grandezza; solo ripetendo l'esperimento un gran numero di volte nelle stesse condizioni osserviamo una distribuzione di probabilità per i possibili valori.

Prima della misura lo stato del sistema fisico è in generale una sovrapposizione di autostati della grandezza misurata. Questa situazione permane allora anche dopo

un'evoluzione temporale, per via della linearità. Ma dopo una misura lo stato è sempre uno e uno solo tra gli autostati, e il valore ottenuto è sempre uno e uno solo, un preciso autovalore, e questo non si può ottenere con una trasformazione lineare. In questa dicotomia consiste il problema della misura.

Da un punto di vista strettamente logico, la misura non fa parte del modello quantistico. Questo modello è stato costruito per poter dedurre delle distribuzioni di probabilità; il procedimento di misura è ciò che constata la casualità e verifica queste distribuzioni di probabilità. Se si accetta che il modello quantistico è un limite a se stesso, che non ha una validità senza confini, il problema della misura potrebbe essere visto come un non problema.

Tuttavia, indubbiamente la misura è essa stessa un processo fisico, un'interazione tra un apparato di misura macroscopico e un sistema microscopico descritto dal modello quantistico, la quale trasforma lo stato di quest'ultimo; è dunque naturale interrogarsi sulla natura di questo processo. L'apparato di misura è a sua volta composto da atomi e particelle, la cui interazione con la particella sotto misura non può non essere descritta in maniera quantistica.

Ciononostante, evoluzione temporale e misura sono due processi distinti e addirittura mutuamente esclusivi; la misura non può essere descritta dall'equazione di Schrödinger, né comunque da alcuna equazione lineare. Lo stato viene *proiettato* dal processo di misura in uno degli autostati della grandezza fisica che viene misurata, e questo non si può in nessun modo ottenere con l'evoluzione di Schrödinger, comunque si configuri l'Hamiltoniano H che descrive un'interazione esterna.

Quando eseguiamo una misura di S_z su uno stato di spin dato dalla sovrapposizione dei due possibili autostati, qual è esattamente il meccanismo fisico dinamico mediante il quale lo stato iniziale viene proiettato su uno di essi? Una questione non risolvibile per un modello probabilistico intrinseco quale è quello della meccanica quantistica. La distribuzione di probabilità appartiene, attraverso la regola di Born, allo stato e quindi rientra nella descrizione matematica fornita dall'equazione di Schrödinger. La trasformazione che lo stato subisce all'atto della misura non è invece descrivibile da una legge matematica, né potrebbe esserlo, trattandosi di un processo casuale apparentemente senza alcuna causa precisa. Se seguiamo l'idea del filosofo Ernst Cassirer, il principio di causalità altro non è infatti che la richiesta che i processi fisici siano descrivibili in forma matematica.

Possiamo dire allora in sintesi che in meccanica quantistica avvengono due tipi radicalmente diversi di trasformazione dello stato:

- l'evoluzione temporale, la quale è lineare, deterministica, continua e reversibile, ed è retta dall'equazione di Schrödinger;
- il processo di misura, il quale è non lineare, casuale, discontinuo e irreversibile, e non è retto da alcuna legge matematica.

Si parla quindi di *riduzione* istantanea – o anche, usando una colorita terminologia degli esordi che rimane molto efficace – di *collasso* del vettore di stato.

Certamente l'evoluzione di Schrödinger tiene conto delle interazioni fisiche del sistema quantistico con l'ambiente esterno, interazioni che sono descritte matematicamente dall'Hamiltoniano. Che cosa ha di speciale quindi l'interazione con l'apparato di misura? Come mai questa dà origine invece alla riduzione dello stato, dato che non può trattarsi di un'interazione fisica nuova, diversa da quelle conosciute?

Nel corso di tutto questo libro discutiamo diverse idee in merito all'interpretazione della meccanica quantistica. Appare con molta chiarezza il fatto che interpretare la teoria è necessario, al fine di coglierne un significato al di là dei dati sperimentali e del perfetto formalismo matematico in grado di inquadrali.

In ultima analisi, che l'interpretazione sia necessaria è proprio conseguenza del fatto che – a differenza della fisica classica – gli enti matematici che compongono il modello matematico della meccanica quantistica si discostano enormemente dagli enti della realtà fisica.

Il problema della misura è uno dei cruciali punti aperti della teoria dal punto di vista interpretativo, e uno dei più dibattuti; è noto che Bohr e Einstein furono tra i più accesi partecipanti a questo dibattito.



Figura 4.2 – Bohr ed Einstein. *Fonte:* Wikimedia.

In un senso più lato si tratta del problema principale della meccanica quantistica, quello del suo carattere aleatorio; non stupisce pertanto che spesso quando si parla di “interpretazioni della meccanica quantistica” *tout court* si faccia riferimento al processo di misura.

Nell'ultimo capitolo del libro viene proposta una sintesi dei principali punti

concettuali di alcune interpretazioni.

Il limite classico

L'atto della misura appare fungere da “traduzione” dall'ambito quantistico all'ambito classico. Una particella deve essere descritta con il linguaggio quantistico, ma l'apparato di misura e i risultati che fornisce vanno sempre descritti con il linguaggio classico. Il risultato di una misura infatti alla fine viene mostrato dallo strumento su una scala graduata, un display, una camera a bolle, una lastra annerita – o comunque sempre in un formato macroscopico. Nell'apparato di Stern-Gerlach, per esempio, si rileva il valore “spin su” o “spin giù” per mezzo di una deviazione macroscopica della particella da una parte o dall'altra. In questo senso, l'atto della misura è sempre un processo macroscopico – e quindi classico.

Questo ci conduce ad accennare a un altro problema aperto, strettamente collegato con quello della misura: l'individuazione del *limite classico*. Dove finisce l'ambito quantistico e dove inizia quello classico? Non ci può essere dubbio sul fatto che la meccanica classica newtoniana sia semplicemente un'ottima approssimazione – valida in un certo ambito – della meccanica quantistica, la quale è una teoria più fondamentale. Ma esattamente quali parametri fanno sì che per certi fenomeni sia possibile utilizzare la prima e per certi altri sia necessario utilizzare la seconda?

Nel caso della teoria della relatività speciale questa delimitazione è ben caratterizzata, perché dipende da un unico parametro: la velocità della luce c . La relatività è anch'essa una teoria ancora più fondamentale della meccanica newtoniana: una teoria quindi che vale sempre, ma che per fenomeni in cui la velocità massima v in gioco è molto inferiore a c può essere ben approssimata dalla teoria newtoniana. Anzi, il rapporto v/c fornisce una stima esatta di quanto si discostano le due teorie in percentuale, e si comprende chiaramente come la meccanica newtoniana emerga gradualmente da quella einsteiniana al diminuire di questo rapporto. Formalmente, la prima si ottiene dalla seconda facendo tendere a infinito la velocità della luce, nel senso che matematicamente tutte le espressioni relativistiche si riducono a quelle newtoniane per $c \rightarrow \infty$.

Per la meccanica quantistica invece la cosa non è per niente così cristallina. Innanzitutto, certamente non si tratta semplicemente di una questione di dimensioni. La meccanica quantistica è stata scoperta nel mondo microscopico, tuttavia in linea di principio non c'è in essa nulla di intrinseco che impedisca che la teoria sia valida anche per oggetti macroscopici. Non esiste, in altre parole, un valore di lunghezza caratteristica contenuto come costante all'interno della teoria quantistica e tale per cui sia possibile usare la meccanica classica per oggetti che hanno dimensioni spaziali molto maggiori. È vero però che c'è anche per la meccanica quantistica una costante

fondamentale della natura che caratterizza la teoria, ed è la costante di Planck h – la quale è dimensionalmente un'energia moltiplicata per un tempo – ma certamente non si ottengono banalmente e immediatamente le espressioni matematiche della meccanica classica passando al limite per $h \rightarrow 0$ in quelle quantistiche. La questione è qui molto più sottile e tutt'ora non chiarita.

Abbiamo a che fare con due modelli matematicamente molto diversi, dato che la teoria classica è deterministica mentre la teoria quantistica è intrinsecamente casuale. Per ottenere il limite classico, per capire come il mondo della fisica classica emerga da fondamenta quantistiche, bisognerebbe pertanto capire come tutti gli effetti di questa casualità a un certo punto divengano trascurabili.

Tra gli oggetti macroscopici ricadono, naturalmente, gli strumenti di misura. È possibile che tutto sommato un apparato di misura segua le leggi quantistiche, e con quali conseguenze?

Capitolo 5

INDETERMINAZIONE

L'indeterminazione di Heisenberg

La teoria matematica generale della meccanica quantistica come messa a punto da von Neumann contiene una parte straordinariamente elegante. Quella che, dato lo stato in un assegnato spazio di Hilbert, permette di ricavare da esso lo spettro dei possibili valori – discreti o continui che siano – di tutte le grandezze fisiche prese in considerazione nel modello, e le rispettive distribuzioni di probabilità.

Senza neanche sfiorare i dettagli di tale teoria, presentiamo alcuni suoi risultati che giocano un ruolo fondamentale dal punto di vista concettuale.

Dato un qualsivoglia stato di un sistema fisico preso da solo, la solita particella, per esempio, esiste sempre una grandezza fisica di cui quello stato è autostato. Di conseguenza, misurando quella grandezza in quello stato in ripetizioni dell'esperimento si ottiene con certezza sempre lo stesso valore, e cioè il corrispondente autovalore.

Questo fatto ha un importantissimo significato: vuol dire che la particella ha sempre almeno una proprietà che è, secondo una definizione di Einstein, un *elemento di realtà*. Prima della misura infatti non si può dire che un sistema fisico possiede la proprietà per esempio di avere spin $+1/2$ lungo z se per questo possibile valore sussiste solo una probabilità del 50%. Ma certamente un autovalore, avendo probabilità 100%, si può considerare una proprietà del sistema realmente esistente, a prescindere dalla misura. È una definizione di elemento di realtà che in effetti appare del tutto sensata. Ritroveremo questo concetto, con risvolti sorprendenti, nel capitolo *Entanglement*.

A mo' di esempio riguardiamo lo stato di spin che abbiamo analizzato nel riquadro *Interferenza di stati di spin* del capitolo *Sovrapposizione*:

$$\psi_C = (1/\sqrt{2}) \cdot (\psi_{+z} + e^{i\varphi} \psi_{-z})$$

Sappiamo che per ogni valore di φ questo stato è autostato della direzione positiva individuata da φ nel piano $x-y$. Il corrispondente autovalore è pertanto da considerare un elemento di realtà della particella.

Per un assegnato stato ci sono poi ovviamente molte grandezze di cui esso non è

autostato; per queste grandezze non abbiamo certezza bensì un'assegnata distribuzione di probabilità, la quale sarà caratterizzata da un valore medio e da una deviazione standard che indica quanto i valori misurati si disperdono.

Detto questo, un risultato fondamentale della meccanica quantistica è che le grandezze fisiche si possono classificare a coppie, a seconda di come la misura di una influisce sulla misura dell'altra. Per illustrare bene questo punto ricorriamo ancora una volta agli esperimenti con lo spin, e prendiamo in esame poi anche le variabili continue.

Misuriamo dunque lo spin di un numero molto grande di elettroni con un apparato di Stern-Gerlach orientato secondo una direzione che chiamiamo z . Anche se non sappiamo nulla dello stato degli elettroni di partenza, sicuramente l'apparato separa quelli che in conseguenza della misura lungo z hanno "spin giù" da quelli che hanno "spin su". Come nella [figura 5.1](#), selezioniamo questi ultimi: abbiamo così eseguito una preparazione per mezzo della quale abbiamo ottenuto un insieme di elettroni descritti dallo stato ψ_{+z} .

Ammettiamo che nello spazio libero non ci siano interazioni esterne in grado di modificare lo spin. Gli elettroni preparati nello stato ψ_{+z} arrivano, uno alla volta, a un secondo apparato di Stern-Gerlach orientato sempre in direzione z : con certezza su ogni elettrone viene rilevato il valore "spin su", come ci aspettiamo dato che ψ_{+z} è un autostato di S_z . Il valore della misura precedente viene confermato.

Ma ora misuriamo sull'elettrone nello stato ψ_{+z} la componente S_x dello spin in una direzione perpendicolare x . Dopo questa misura avremo quindi i valori di entrambe le due componenti S_z e S_x ? Questo è ciò che potremmo aspettarci ragionando in maniera classica, ma in meccanica quantistica non è così.

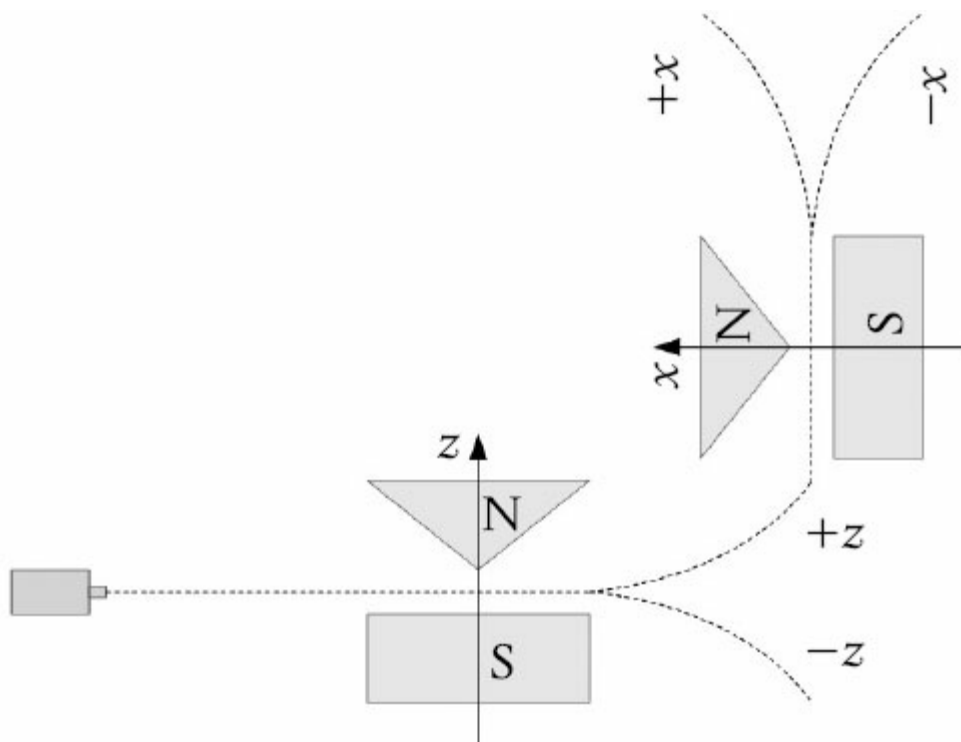


Figura 5.1 – Misure successive di spin.

Un elettrone nello stato ψ_{+z} se misurato lungo x ha probabilità $\frac{1}{2}$ di mostrare ciascuno dei due possibili valori. Selezioniamo gli elettroni che emergono con “spin su” in direzione x . Questi elettroni però hanno completamente perso il valore di spin nella direzione z che avevano prima. La prova è molto semplice: se inviamo uno alla volta questi elettroni che sono nello stato ψ_{+x} a un apparato di Stern-Gerlach orientato secondo z , i due possibili valori sono equiprobabili; ossia il 50% degli elettroni vengono deviati in su e il 50% in giù.

Il punto fondamentale è che S_z e S_x – e quanto diciamo vale per qualunque coppia di direzioni ortogonali – non hanno autostati in comune. Se eseguiamo una misura di S_z , un precedente stato, qualunque esso sia, viene forzatamente “proiettato” in uno dei possibili autostati di questa grandezza, per esempio ψ_{+z} . Questo però non è autostato di S_x , per cui se a questo punto misuriamo lungo x troviamo i possibili valori non con certezza ma solo con uguale probabilità; e lo stesso avviene se la misura iniziale di S_z fornisce ψ_{-z} .

Le componenti di spin lungo due direzioni spaziali ortogonali sono quindi innanzitutto di fatto da considerare come grandezze fisiche diverse. E si tratta inoltre di grandezze *incompatibili*: non esiste uno stato di spin che sia autostato di entrambe, ragione per cui misurando le due grandezze su uno stesso stato – qualunque esso sia – almeno una delle due presenterà una dispersione non nulla.

L’incompatibilità tra coppie di grandezze fisiche è il contenuto di quello che viene chiamato *principio di indeterminazione*.

Il principio di indeterminazione è legato al nome di Werner Heisenberg, che storicamente lo propose nel 1927 per la coppia di grandezze posizione e momento, la prima circostanza in cui fu messo in evidenza questo comportamento.

In fisica classica naturalmente le grandezze fisiche sono sempre compatibili. Coppie di grandezze compatibili in meccanica quantistica sono per esempio modulo e componente z del momento angolare orbitale (L, L_z) e momento ed energia cinetica (p, K). Vuol dire che è possibile ottenere un valore certo per entrambe le grandezze della coppia, poiché esse hanno autostati in comune.

Nella sua formulazione generale il principio di indeterminazione viene espresso quantitativamente come limite inferiore imposto al prodotto tra le deviazioni standard di due grandezze fisiche, che chiamiamo genericamente V e W :

$$\sigma(V) \cdot \sigma(W) \geq [V, W]$$

Con il simbolo $[V, W]$ abbiamo indicato un valore numerico reale che dipende dalle due grandezze in esame, detto *commutatore* di V e W (per semplicità vi abbiamo inglobato anche le costanti moltiplicative; va notato inoltre che esso, come ci si aspetta,

contiene al proprio interno la costante di Planck come fattore di scala).

Bisogna capire bene cosa significa esattamente questa espressione. Prepariamo un sistema fisico quantistico in modo che si venga a trovare in un certo stato. In molte ripetizioni di questa preparazione misuriamo la grandezza V : troviamo ogni volta valori diversi e possiamo ricavare un valore $\sigma(V)$ per la dispersione di questi valori. In molte altre ripetizioni della stessa preparazione misuriamo la grandezza W : troviamo ogni volta valori diversi e possiamo ricavare un valore $\sigma(W)$ per la dispersione di questi valori. Il prodotto delle deviazioni standard così ottenute non può essere maggiore di un preciso numero.

Quindi se la distribuzione di probabilità della grandezza aleatoria V è tale per cui i valori misurati hanno una dispersione piccola attorno al valore medio, necessariamente la grandezza aleatoria W deve avere una dispersione grande, e viceversa. Al limite, se una delle due σ è nulla (valore certo, grandezza perfettamente determinata), l'altra deve andare a infinito (grandezza totalmente indeterminata) – il che in pratica vuol dire semplicemente che la probabilità viene a essere distribuita equamente su tutti i valori possibili.

Per dirla con altre parole, il principio di indeterminazione altro non è che l'affermazione che la casualità quantistica non è eliminabile, da qualche parte deve sempre rimanere.

Ovviamente quanto esattamente le distribuzioni di probabilità delle due grandezze possano avere una dispersione limitata dipende dal valore del commutatore. Mettiamo, solo per esemplificare, che sia $\sigma(V) = 2$; se il commutatore vale 10 allora $\sigma(W)$ deve essere maggiore di 5, ma se il commutatore vale 100 allora $\sigma(W)$ deve essere maggiore di 50. Il commutatore è cioè una misura di quanto le due grandezze sono incompatibili. Nel caso particolare in cui $[V, W] = 0$, le due grandezze sono compatibili, ovvero hanno autostati in comune e quindi possono essere entrambe perfettamente determinate se misurate su uno di questi autostati comuni.

Spesso si legge che due grandezze compatibili o incompatibili rispettivamente sono o non sono misurabili “simultaneamente”. Una scelta terminologica poco felice, dato che naturalmente ciò che si intende è quello che abbiamo appena illustrato, e non che le due misure siano da eseguire nello stesso istante di tempo o comunque sullo stesso sistema singolo.

Incerteza di misura

L'incompatibilità è chiaramente una conseguenza diretta della casualità quantistica, e non ha invece niente a che fare con l'*incerteza di misura*, che è completamente un'altra cosa.

Immaginiamo di voler misurare una grandezza fisica in un esperimento eseguito in

condizioni stabilite. In ambito classico stiamo “leggendo” un valore unico preesistente, il quale si presenta sempre uguale a una ripetizione dell’esperimento nelle stesse condizioni, ed è del tutto indipendente dalla misura. In ambito quantistico invece i valori possibili della grandezza fisica sono più di uno: ripetendo l’esperimento e misurando troviamo valori diversi con un’assegnata probabilità, e questi valori risultano quindi dispersi attorno a una media.

Sappiamo però che in entrambi gli ambiti l’atto della misura è un processo macroscopico. Il valore fornito da una misura – sia nel caso classico sia nel caso quantistico – all’atto pratico non è mai preciso bensì è sempre affetto da un errore dovuto alle inevitabili limitazioni pratiche dello strumento e del metodo di misura, nonché ai disturbi che agiscono sulla misura stessa. Questo errore varia a ogni ripetizione dell’esperimento e può quindi essere considerato una variabile casuale; anzi, si trova che l’errore casuale di misura segue una distribuzione di probabilità gaussiana (non teniamo conto qui di un eventuale errore sistematico di misura, considerandolo eliminabile).

Si verifica pertanto una dispersione di valori denominata incertezza di misura, che può essere quantificata dalla deviazione standard e che viene indicata con il simbolo Δ . Ciò avviene – lo ripetiamo – sia per una misura su un sistema classico sia per una misura su un sistema quantistico, perché l’atto misura in sé è un’operazione classica.

La dispersione dovuta all’errore di misura si può però in linea di principio ridurre quanto si vuole, perfezionando strumenti e procedure ed eliminando o estrapolando le fonti di disturbo. E in ogni caso la media della distribuzione di probabilità si può assumere come “valore vero” della misura, accompagnato da una qualche indicazione numerica collegata alla dispersione che fornisca la bontà di questa approssimazione, come quando si dice che la lunghezza di un oggetto è $3,4 \pm 0,2$ cm.

In una misura su un sistema quantistico a un’eventuale incertezza di misura classica si sovrappone la dispersione dovuta all’aleatorietà quantistica, la quale è intrinseca e non riducibile in alcun modo, e pertanto ben più significativa. Ognuno dei valori diversi che si ottengono da una ripetizione all’altra è proprio un valore vero; la media μ di questi dà un’indicazione di dove siano posizionati i possibili valori ma può non coincidere con nessuno di essi.



Figura 5.2 – Il Liceo Heisenberg ad Amburgo. *Fonte:* Wikimedia.

Eppure nella formulazione originaria di Heisenberg del principio di indeterminazione, proprio perché il quadro teorico non era ancora stato chiarito, si supposeva che l'indeterminazione nella misura della coppia di grandezze posizione e momento fosse dovuta a un inevitabile disturbo da parte del procedimento di misura a livello microscopico. Per esempio: per conoscere la posizione di una particella bisogna "illuminarla" inviando almeno un fotone il quale collide con essa e così facendo ne altera il momento. Heisenberg pervenne per questa via alla nota espressione:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar / 2$$

che in effetti però coincide con l'espressione generale vista nel paragrafo precedente per il caso particolare della coppia (x, p) , qualora si sostituiscano le incertezze di misura Δ con le deviazioni standard dell'indeterminazione quantistica σ :

$$\sigma(x) \cdot \sigma(p) \geq \hbar / 2$$

La relazione energia-tempo

Assieme alla relazione posizione-momento Heisenberg derivò una relazione di indeterminazione energia-tempo, con la medesima forma:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar / 2$$

Ma anch'essa non riguarda in realtà l'incertezza di misura; anch'essa vale nel modello corrente della meccanica quantistica, ma bisogna chiarire qual è qui il significato che va attribuito alle variazioni indicate con Δ .

Questa relazione infatti non è uno dei casi particolari della formulazione generale del principio di indeterminazione per cui basta scriverla con σ ; la sua origine è del tutto differente. Non esiste una coppia di grandezze incompatibili energia-tempo, per il semplice fatto che il tempo in meccanica quantistica (non relativistica) non è affatto una grandezza dinamica, bensì solo un parametro che etichetta lo stato. In altre parole, l'energia è qualcosa che in senso quantistico si misura ma il tempo no. E se il tempo non si misura non avrebbe senso un'espressione come $\sigma(t)$.

Nella teoria quantistica si trova che l'espressione energia-tempo di Heisenberg ha un significato particolare, che illustriamo. Con ΔE va inteso $\sigma(E)$, e questo ce lo aspettavamo; con Δt si intende invece il tempo che ci vuole perché il valore medio $\mu(V)$ di una *qualunque* grandezza dinamica V abbia una variazione significativa: la variazione di *un sigma*, pari quindi a $\sigma(V)$.

Chiaramente, quindi, la relazione di indeterminazione energiatempo numericamente dipende in realtà da quale grandezza fisica si considera. Ma l'interessante significato generale della relazione può essere così espresso:

- se $\sigma(E)$ è piccola allora Δt è grande: vuol dire che se l'energia è poco dispersa allora nessuna grandezza può variare rapidamente (in relazione alla propria dispersione);
- se Δt è piccola allora $\sigma(E)$ è grande: vuol dire che se ogni grandezza può variare rapidamente (in relazione alla propria dispersione) l'energia è molto dispersa.

La relazione di indeterminazione energia-tempo mette quindi ancora una volta in evidenza il ruolo particolare della grandezza energia in meccanica quantistica, in quanto legata alle variazioni temporali delle grandezze fisiche. Infatti nell'equazione di Schrödinger è l'energia che governa l'evoluzione temporale del sistema fisico.

L'effetto Zenone

Una questione molto interessante è questa: può verificarsi il caso in cui uno stato rimanga inalterato nel tempo? Questo sarebbe l'equivalente quantistico di una particella classica ferma nel sistema di riferimento considerato, o più in generale di un sistema classico che non evolve.

Per lo spin ciò è in effetti possibile: una particella che si trova in un assegnato ma qualsivoglia stato di spin e non è sottoposta a interazioni manterrà questo stato, fino

all'insorgere di un'interazione o di una misura. Ma per la posizione non è così.

La posizione e il momento sono esattamente le grandezze che in ambito classico costituiscono lo stato della particella. Una particella classica ha una traiettoria proprio perché rilevandone la posizione è possibile rilevarne anche il momento: si può allora deterministicamente prevedere quale sarà la prossima posizione (e il prossimo momento), e così via.

In ambito quantistico invece le cose stanno diversamente. Anche in assenza di interazioni un qualunque stato di posizione non può mantenersi inalterato nel tempo (tranne che per il caso estremo di posizione completamente indeterminata), dato che posizione e momento sono incompatibili.

In particolare, se la posizione è perfettamente determinata (cosa che si ottiene mediante una misura) allora il momento è totalmente disperso. Qualunque valore di momento è equamente probabile, per cui non si può stabilire dove e come la particella si dirige: la posizione si disperde nuovamente. A rigore otteniamo ancora la stessa posizione solo se misuriamo nuovamente in un istante di tempo infinitamente vicino a quello della prima misura.

La particella non mantiene nel tempo la proprietà di “essere in un punto”, e perciò non ha una traiettoria. Una conseguenza è che una particella quantistica non può restare ferma in un punto.

Naturalmente, a differenza della traccia nella camera a bolle, l'impatto della particella che va ad annerire lo schermo di misura è una sorta di “misura distruttiva” e per forza di cose non è più possibile eseguire misure; in casi come quest'ultimo ovviamente quanto detto non si applica.

Ci sono poi delle particolari situazioni in cui è possibile *impedire* l'evoluzione temporale dello stato di un sistema quantistico eseguendo continuamente una misura su di esso.

Un sistema instabile come un atomo posto in uno stato energetico eccitato decade spontaneamente al livello energetico fondamentale in un istante casuale ma con una probabilità assegnata. In un campione con un numero molto grande di atomi ci saranno statisticamente un numero assegnato di decadimenti nell'unità di tempo. Se si misura con una frequenza sufficientemente alta il valore energetico degli atomi si ottiene l'effetto di “congelarli” nello stato iniziale e rallentare – fino a impedire del tutto – il decadimento.

Benché questo fenomeno non riguardi la posizione, è molto suggestivo il nome di *effetto Zenone* che gli è stato dato da George Sudarshan e Baidyanath Misra nell'articolo del 1977 *The Zeno's paradox in quantum theory* (“Il paradosso di Zenone nella teoria quantistica”). Il riferimento è a Zenone di Elea (V secolo a.C.), il quale – come riportato nella *Fisica* di Aristotele – escogitò una serie di paradossi nell'intento di dimostrare il punto di vista del suo maestro Parmenide, secondo il quale la pluralità e il cambiamento, e in particolare il movimento, sono solo un'illusione. Tra i più celebri (ma pur sempre errati) di tali ragionamenti ci sono il paradosso della freccia e quello

della gara di corsa tra la tartaruga e il pie' veloce Achille.

L'effetto Zenone era già stato descritto da Alan Turing nel 1954, con le parole:

È facile mostrare usando la teoria standard che se un sistema parte da un autostato di una qualche grandezza, e questa grandezza viene misurata n volte al secondo, allora, anche se lo stato non è stazionario, la probabilità che il sistema si trovi nello stesso stato dopo – diciamo – un secondo, tende a uno quando n tende a infinito; cioè, che osservazioni continue impediscono il movimento.

Non posso fare a meno di pensare all'effetto Zenone e alla frase di Turing quando mi capita di guardare continuamente l'orologio aspettando impaziente un'ora convenuta, perché in questi casi ho sempre l'impressione che il tempo rallenti, fin quasi a fermarsi.

Capitolo 6

INDISTINGUIBILITÀ

Alternative indistinguibili

Poniamoci questa semplice domanda per l'esperimento delle due fenditure: se la particella è una e indivisibile, da quale delle due fenditure passa? Perché necessariamente deve passare da una di esse, giusto?

Sbagliato, se ricordiamo il fatto fondamentale che distingue la meccanica quantistica da quella classica: a una particella quantisticamente non può essere assegnata una traiettoria. La posizione della particella è distribuita secondo una legge probabilistica e solo all'atto della rilevazione, come avviene sullo schermo di misura, la sua posizione assume un valore preciso.

Un'idea immediata è allora quella di mettere dei dispositivi di rilevazione in corrispondenza alle fenditure, naturalmente fatti in modo tale da disturbare in maniera trascurabile la particella. Ebbene, in tal caso quello che succede è che l'interferenza non compare più!

A ogni esecuzione dell'esperimento uno e uno solo dei due dispositivi “scatta”, comunicando così l'informazione che la particella è passata per quella particolare fenditura prima di andare a finire sullo schermo di misura. Dopo che un congruo numero di neutroni sono stati sparati, la distribuzione di probabilità che vediamo formarsi sullo schermo di misura non presenta più l'alternarsi di massimi e minimi tipico dell'interferenza della [figura 1.3](#). Piuttosto presenta due picchi in corrispondenza delle due fenditure come nella [figura 3.3](#), e altro non è che la somma della distribuzione che si avrebbe tenendo aperta la fenditura A e di quella che si avrebbe tenendo aperta solo la fenditura B . In altre parole, per la distribuzione di probabilità torna a valere quella che nel paragrafo *Lo stato in meccanica quantistica* abbiamo chiamato “la semplice e logica regola della somma”:

$$p_C(x) = \frac{1}{2} \cdot [p_A(x) + p_B(x)]$$

Il termine d'interferenza aggiuntivo $I(x)$ a secondo membro scompare, o per meglio dire è identicamente nullo. Il risultato è cioè quello che ci aspetteremmo dalla fisica classica – esattamente quello che otterremmo eseguendo l'esperimento con minuscole

palline, non più il risultato sorprendente e controintuitivo della meccanica quantistica.

Evidentemente, la differenza tra i due casi risiede banalmente nella preparazione: l'apparato sperimentale usato per preparare le particelle che poi si dirigono verso lo schermo di misura è diverso in presenza o in assenza di rivelatori, e questo ha un effetto sulle *alternative* che le particelle hanno a disposizione.

Introduciamo allora un interessante punto di vista: la sovrapposizione può essere intesa nel senso di sovrapposizione tra diverse alternative fisiche, e di conseguenza la probabilità quantistica può essere interpretata come manifestazione del maggiore o minore grado di *indistinguibilità* di quelle alternative.

In presenza di rivelatori ciascuna particella sullo schermo di preparazione passa da un punto preciso; le particelle che arrivano sullo schermo di misura in questo caso non sono il risultato di alternative diverse, perché ne hanno seguita una soltanto che quindi è totalmente individuata, totalmente distinguibile dall'altra, e questo rimane "codificato" nella distribuzione di probabilità.

In assenza di rivelatori, al contrario, non c'è modo di distinguere quale delle due alternative si verifica; sullo schermo di misura allora non è possibile che si producano effetti fisici che permettano di distinguere queste alternative. Per poter mantenere l'indistinguibilità fisica occorre che le due alternative producano quella che chiamiamo interferenza e in ultima analisi una distribuzione di probabilità nella quale non ci sia traccia di un precedente valore della posizione.

Sullo schermo di misura, prima dell'impatto, tutti i valori di x sono possibili, sono cioè autovalori della posizione. Sono quindi le possibili alternative che la particella ha a disposizione. La probabilità di ciascuna di esse riflette il proprio maggiore o minore grado di indistinguibilità, e dipende dalle condizioni dell'esperimento che influenzano l'indistinguibilità delle alternative, quindi dal fatto che presso le fenditure siano posti o meno dei rivelatori.

Fin qui, questa maniera di interpretare la probabilità quantistica come indistinguibilità delle alternative non sembra aggiungere nulla di veramente nuovo, appare semplicemente come una diversa scelta lessicale per dire la stessa cosa. Si tratta invece di un approccio profondo, in quanto in ambito quantistico l'indistinguibilità è una caratteristica fondamentale delle particelle stesse.

Identità e individualità

La localizzazione spaziale è uno dei parametri fisici che possono individuare una particella e distinguerla da un'altra. Un elettrone che si misura essere "qui" è distinto da uno che si misura essere "là". Il fatto essenziale è che questo potrebbe essere l'unico modo per fare la distinzione.

Un elettrone, infatti, è assolutamente identico a ogni altro elettrone che esiste

nell'universo. L'identità di questo oggetto, ciò che lo rende un elettrone, è stabilita da un ben determinato insieme di proprietà, date da valori precisi di quelle che abbiamo chiamato grandezze intrinseche: massa m_e , carica q_e , spin $s = 1/2$. Anzi, si potrebbe anche argomentare che un elettrone è questo insieme di proprietà. Non ci sono variazioni a livello fondamentale: tutti gli elettroni che esistono, così come tutti quelli che vengono creati nelle reazioni subnucleari, possiedono esattamente quei valori dei tre parametri identificativi. Non c'è un elettrone che, pur essendo identificabile come tale, ha un po' più o un po' meno massa di altri. E lo stesso per le altre particelle elementari: ognuna ha dei valori precisi dei parametri intrinseci, e non esistono oggetti elementari con valori a piacere di questi parametri.

Un fatto del tutto peculiare, perché al contrario nel mondo macroscopico non esistono due oggetti assolutamente identici. Due formiche, due fiocchi di neve, due trifogli, avranno sempre delle differenze più o meno significative. Lo stesso vale per gli oggetti costruiti dall'uomo: per quanto la tecnologia impiegata sia raffinata, non si produrranno mai due viti perfettamente uguali, o due monete, o due libri. Ci sarà sempre una pur minuscola differenza che permette di distinguere l'uno dall'altro, dato che le proprietà misurabili di un oggetto sono sempre distribuite secondo la curva a campana di Gauss.

Questa constatazione è stata elevata al rango di principio in filosofia: secondo il *principium identitatis indiscernibilium* ("principio di identità degli indiscernibili") non possono esistere in natura due enti totalmente identici, altrimenti sarebbero lo stesso ente; due oggetti che non sono lo stesso oggetto devono avere almeno una proprietà osservabile che permette di distinguerli. Il principio, già sostenuto tra gli altri da Seneca, Cusano, Giordano Bruno e Pico della Mirandola, è noto principalmente nella formulazione di Leibniz, e può essere espresso come legge della logica formale.

Tuttavia il principio di identità degli indiscernibili è stato criticato da Kant, che nella *Critica della ragion pura* scrive:

La diversità dei luoghi rende la molteplicità e la distinzione degli oggetti, come manifestazione, senza ulteriori condizioni, di per sé non solo possibile, bensì anche necessaria.

Per Kant, dunque, due oggetti altrimenti identici vengono distinti proprio mediante la localizzazione in uno spazio concepito come categoria assoluta a priori, a differenza dello spazio di Leibniz che è solo relazionale ed esprime cioè semplicemente una relazione tra oggetti. La localizzazione spaziale come proprietà distintiva funziona perché naturalmente c'è un assunto sottostante: il principio di impenetrabilità dei corpi, per il quale due oggetti non possono occupare lo stesso spazio nello stesso tempo.

Ogni singolo trifoglio possiede delle proprietà che ne stabiliscono l'identità come trifoglio, l'appartenenza alla classe dei trifogli, ma ne ha poi altre che stabiliscono la

sua *individualità*, che lo rendono unico tra i trifogli e distinguibile da tutti gli altri.

Ogni singolo elettrone (quanto diciamo vale per ogni particella elementare) ha un'identità come tale, ma è privo di individualità, per cui è indistinguibile da ogni altro.

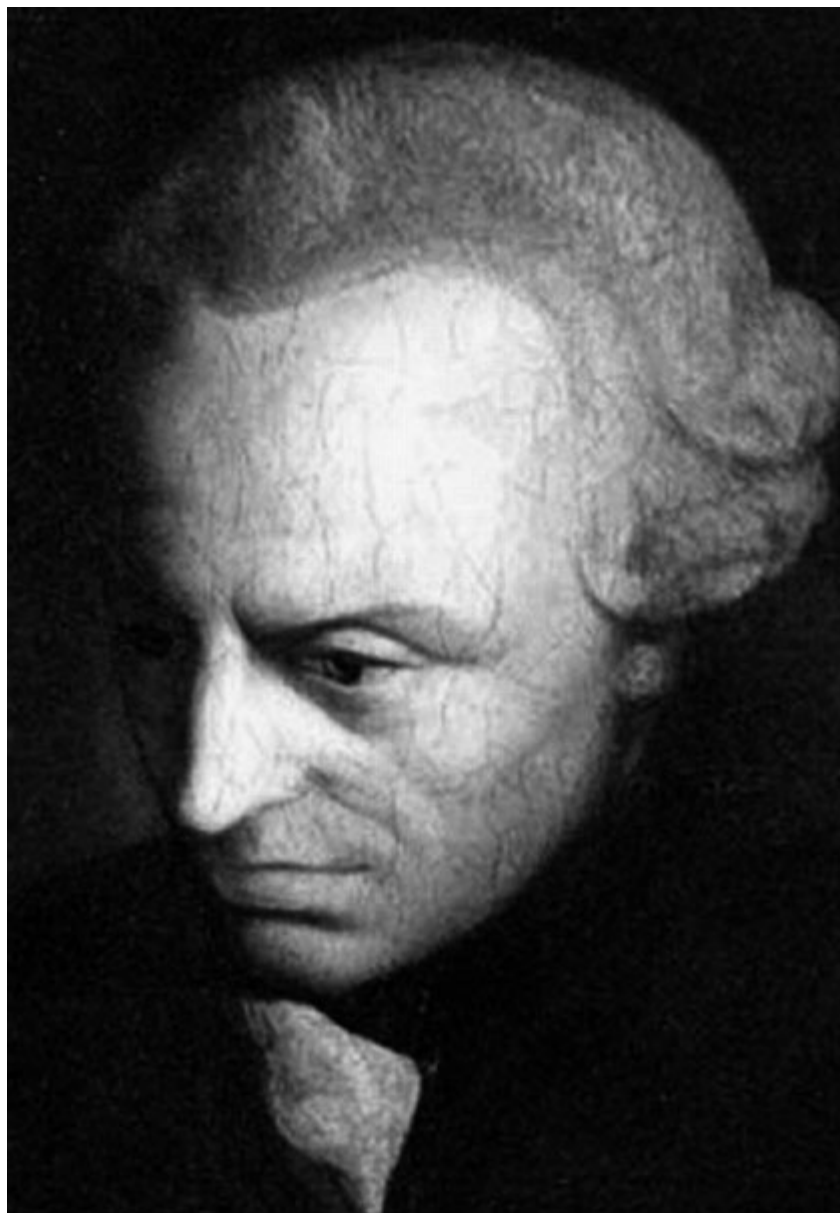


Figura 6.1 – Immanuel Kant. *Fonte:* Wikimedia.

La nave di Teseo

L'individualità per come l'abbiamo discussa è vista in una prospettiva sincronica; un oggetto cioè può essere o non essere "unico" rispetto a tutti gli altri oggetti dell'universo che esistono nello stesso tempo.

Ma altrettanto profonda e con risvolti paradossali è la riflessione sulla dimensione diacronica dell'individualità. Io cambio sicuramente con il trascorrere del tempo, sia

fisicamente sia mentalmente. Le molecole che assommo dall'ambiente mediante l'assunzione di cibo e altri meccanismi fisiologici ne vanno a sostituire altre. Eppure, io sono sempre io, la stessa persona di anni addietro. Un sedia a cui viene sostituita una gamba è comunque “quella” sedia, e un'opera d'arte restaurata è “di nuovo” se stessa, giusto?

Forse l'esempio più citato circa il paradosso evocato dal concetto di individualità di un oggetto attraverso il tempo è quella della nave di Teseo.

Secondo la mitologia greca Teseo, figlio del re di Atene Egeo, entrò nel labirinto in cui Minosse aveva relegato il Minotauro insieme ai giovani destinati – quale annuale tributo – a essere divorati dalla mostruosa creatura. Ma Teseo riuscì a uccidere l'essere mezzo uomo e mezzo toro, e a uscire poi dal labirinto grazie al filo che gli aveva dato la figlia di Minosse, Arianna.

La nave con cui Teseo ritornò in patria fu conservata quale trofeo, tuttavia a un certo punto fu necessario sostituire una vela. Certamente la nave di Teseo rimase però sempre la nave di Teseo. Ma a poco a poco nel corso degli anni anche le altre parti dovettero essere sostituite, una alla volta, finché un giorno anche l'ultimo fasciame originario rimasto fu rimpiazzato: quella nave a questo punto era ancora la nave di Teseo?

Probabilità quantistica e indistinguibilità

Ovviamente non si può dipingere di rosso un elettrone per marcarlo, tuttavia lo si può, in un dato istante di tempo, individuare e anche distinguere da altri elettroni mediante le sue grandezze dinamiche e in particolare mediante la posizione spaziale. Il fatto però è che la “marcatura” di una particella elementare mediante la sua posizione spaziale deve essere fatta per mezzo di un'azione fisica. In altre parole, la posizione deve essere misurata, altrimenti anche questa maniera di individuare la particella viene a cadere.

E per essere sempre distinguibile, per avere sempre una traiettoria, questa misura andrebbe fatta istante per istante. Certamente in particolari esperimenti è possibile monitorare una particella elementare misurando continuamente la posizione, come per esempio in una camera a bolle. Ma normalmente ciò non avviene. Un elettrone non interagisce in ogni istante con un qualche sistema fisico che in tal modo ne determina continuamente la posizione perché lo coinvolge in un processo fisico.

L'elettrone rimane dunque indistinguibile. A questo punto, certamente non è possibile applicare le leggi classiche del moto di Newton a un sistema fisico delimitato costituito da una particella che non è etichettabile in alcun modo, che non ha individualità ma solo identità, che è solo un'istanza dell'“essere elettrone”; che potrebbe non essere persistente nel tempo ovvero essere rimpiazzata durante il tragitto da un'altra della stessa specie.

Si vede quindi che si potrebbe allora assumere direttamente l'indistinguibilità dei

mattoni elementari di cui è fatto il mondo quale principio fondamentale soggiacente al comportamento della natura, dal quale consegue l'aleatorietà delle grandezze fisiche nonché l'interferenza e lo stesso principio di indeterminazione.

Al di là del punto di vista che si assume, il fatto essenziale è che l'indistinguibilità delle particelle elementari ha conseguenze fisiche.

In un certo senso, comunque, il fatto che le particelle elementari siano indistinguibili ha una sua coerenza logica. Appare sensato cioè che esse, proprio in quanto costituenti ultimi della materia e della radiazione, così come debbano essere prive di estensione spaziale, per la stessa ragione vadano concepite anche come prive di individualità.

Capitolo 7

ENTANGLEMENT

I calzini del Dr. Bertlmann

Affrontiamo ora il fenomeno del cosiddetto *entanglement*. Questo termine inglese è entrato nell'uso scientifico comune anche in italiano in mancanza di un corrispondente termine che sia altrettanto efficace nel rendere l'idea. L'aggettivo inglese *entangled* vuol dire più o meno “ingarbugliato” o “interallacciato”, e si riferisce a uno stato quantistico in cui due particelle o due sistemi mostrano appunto una particolare corrispondenza, chiamata *correlazione*, tra i valori misurati sull'una e quelli misurati sull'altra. Un termine adeguato per definire il fenomeno sarebbe pertanto anche “correlazione quantistica”.

Il passaggio critico quindi è proprio quello da una sola particella a due o più, passaggio che svela ancora altri comportamenti “strani” rispetto a ciò a cui siamo abituati in fisica classica, in quanto il sistema di due particelle può essere preparato in uno stato particolare, lo stato *entangled*.

In realtà la correlazione tra grandezze fisiche in sé non sarebbe nulla di straordinario, è anzi un fatto del tutto normale come nel caso in cui valgano dei principi di conservazione. Una correlazione classica deterministica si verifica per esempio in un sistema formato da due palline poste agli estremi di una molla compressa. Dopo che la molla viene rilasciata, la palline avranno sempre momenti opposti, nonché posizioni simmetriche rispetto al punto centrale della molla. Se misuriamo il momento di una pallina conosciamo istantaneamente il momento dell'altra, e la stessa cosa può dirsi per la posizione; ma queste grandezze fisiche sono lì anche prima e indipendentemente dall'atto della misura, e la misura semplicemente li legge. Nessun mistero qui.

Ancora più intuitivamente: immaginiamo di mettere in una scatola una pallina bianca e in un'altra scatola una pallina nera. I colori sono quindi perfettamente correlati, essendo uno l'opposto dell'altro. Teniamo una scatola a caso e spediamo l'altra sulla Luna. Abbiamo solo il 50% di possibilità di indovinare il colore della pallina nella nostra scatola. Ma non appena apriamo quest'ultima, istantaneamente conosciamo il colore della pallina che si trova sulla Luna. Naturalmente però il colore era predeterminato, è solo l'informazione in nostro possesso che si è modificata.

John Stewart Bell, introducendo l'argomento di Einstein-Podolski-Rosen, illustrò la

correlazione classica con un simpatico esempio, divenuto celebre, nel suo articolo del 1981 *Bertlmann's socks and the nature of reality* (“I calzini di Bertlmann e la natura della realtà”), poi inserito nella raccolta *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics* (“Dicibile e indicibile in meccanica quantistica”).

Reinhold Bertlmann è un fisico austriaco che ha lavorato insieme a Bell al CERN. Nell'articolo citato, che comprende persino un disegno di Bertlmann e dei suoi calzini, Bell scrive:

Il filosofo della strada, che non è stato sottoposto a un corso di meccanica quantistica, non è per niente impressionato dalle correlazioni di Einstein-Podolski-Rosen. Può indicare molti esempi di correlazioni simili nella vita di tutti i giorni. Il caso dei calzini di Bertlmann viene citato spesso.

Al Dr. Bertlmann piace indossare calzini di diverso colore. Quale colore avrà su un dato piede in un dato giorno è del tutto imprevedibile. Ma non appena vediamo che il primo calzino è rosa possiamo essere sicuri che il secondo calzino non sarà rosa. L'osservazione del primo, e la conoscenza delle abitudini di Bertlmann, ci fornisce un'immediata informazione sul secondo. Tutti i gusti sono gusti, ma a parte questo non c'è qui nessun mistero. E questa faccenda di EPR [Einstein-Podolski-Rosen, *N.d.A.*] non è forse la stessa cosa?



Figura 7.1 – I calzini del Dr. Bertlmann nel 2007. *Fonte:* Wikimedia.

Sulla sua amicizia e collaborazione con Bell (prematuramente scomparso nel 1990) Bertlmann scrisse nel 2015 un articolo dal titolo *Bell's Universe: A Personal Recollection* (“L’universo di Bell: un ricordo personale”), nel quale si legge:

Vedere la vignetta che John aveva personalmente disegnato, che raffigurava me con i miei calzini spaiati, quasi mi stroncò. Tutto era avvenuto in maniera così inattesa – non avevo la più pallida idea che John avesse notato la mia abitudine di indossare calzini di colore diverso, un’abitudine che avevo

coltivato fin da quando ero un giovane studente, una mia speciale protesta da “generazione del 68”. Quell’articolo mi proiettò *istantaneamente* nel dibattito quantistico, il che cambiò la mia vita. Da allora i “calzini di Bertlmann” hanno sviluppato una vita propria. Si possono trovare dappertutto in Internet, nelle discussioni di divulgazione scientifica, e persino nel campo della letteratura e dell’arte.

L’argomento di Einstein-Podolski-Rosen

Già dall’ottobre del 1933 Albert Einstein aveva preso stabile dimora negli Stati Uniti, a Princeton, dove lavorava presso l’*Institute for Advanced Study* e dove rimase fino a quando morì nel 1955. Fu lì che Einstein, insieme a Boris Podolski e a Nathan Rosen, scrisse uno degli articoli più noti della storia della fisica, dal titolo *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?* (“Si può considerare completa la descrizione quanto-meccanica della realtà fisica?”), che fu pubblicato nel maggio del 1935 dalla rivista specializzata *Physical Review*.

Nell’articolo viene proposto un esperimento mentale, divenuto celebre con il nome di argomento (o, meno correttamente, paradosso) di EPR, dalle iniziali degli autori. Come il titolo lascia subito intuire, il proposito degli autori era di dimostrare quella che, come abbiamo già detto nel paragrafo *Il dado è tratto*, fu sempre la ferma convinzione di Einstein. La convinzione cioè che il modello probabilistico della meccanica quantistica sia semplicemente dovuto a una mancanza di informazioni; che alla teoria stessa manchino necessariamente delle altre variabili, non accessibili ma esistenti, le quali la renderebbero deterministica.

Ora, la descrizione probabilistica per una sola particella non può essere aggirata in alcun modo, per via del principio di indeterminazione. Come sappiamo, possiamo certamente preparare la particella in modo che la sua posizione sia esattamente determinata, semplicemente misurando questa grandezza; c’è però un’altra grandezza, il momento, la quale viene allora a essere completamente indeterminata. La casualità rimane.

Allo scopo di dimostrare l’incompletezza della meccanica quantistica, Einstein e i suoi collaboratori considerano allora non una bensì due particelle, le quali abbiano interagito tra loro solo per un certo intervallo temporale, ovvero equivalentemente che abbiano un’origine comune come avviene se le particelle sono il prodotto del decadimento di una, diversa, particella originaria. Ciò è fondamentale per l’esperimento mentale di EPR: questa condizione infatti può essere tale da imporre una perfetta correlazione tra una grandezza fisica misurata su una particella e la stessa grandezza misurata sull’altra. Esattamente questo è lo stato preso in esame da EPR, e ciò consente loro di dimostrare che in tale caso sia la posizione sia il momento di ciascuna particella

possono essere determinate con esattezza, contraddicendo così il principio di indeterminazione.

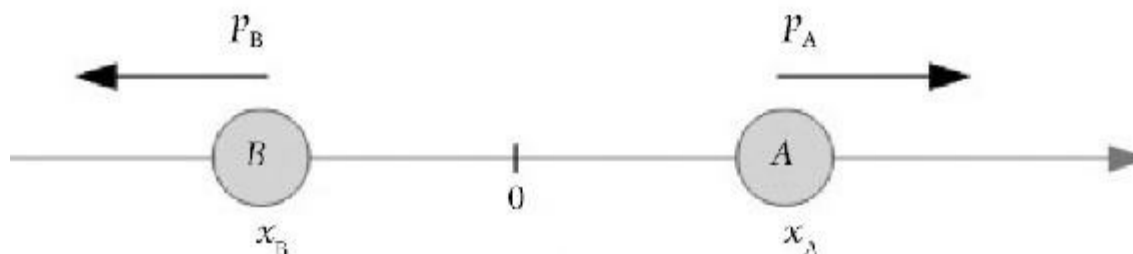


Figura 7.2 – L'esperimento mentale di EPR.

Nell'argomento di EPR due particelle, come quelle generate da un decadimento, si trovano in uno stato tale per cui il momento complessivo all'istante iniziale sia nullo: se la particella A ha momento p_A secondo un asse orientato, la particella B ha momento $p_B = -p_A$; in altre parole, il processo consiste nella creazione di una coppia di particelle che vanno a dirigersi in direzioni opposte, come nella [figura 7.2](#), in zone spaziali simmetriche rispetto al punto di origine ed etichettate da un asse che chiamiamo x .

Dall'istante della separazione in poi le due particelle non sono più sottoposte ad alcuna interazione e di conseguenza vale la legge fisica di conservazione del momento totale; in altre parole, i momenti delle due particelle devono sempre essere uguali e opposti. Lo stato del sistema complessivo di due particelle nel quale si presenta questo vincolo, questa perfetta correlazione, viene chiamato stato entangled. Questo termine non fu utilizzato da EPR, bensì coniato successivamente da Erwin Schrödinger. Che uno stato di questo tipo per un sistema composto fosse contenuto nel formalismo della meccanica quantistica era verosimilmente già stato notato in precedenza, ma l'articolo di EPR del 1935 portò alla ribalta questa possibilità, e soprattutto le sue conseguenze.

Se nell'analogo classico visto nel paragrafo precedente non ci potevano esserci dubbi, il dubbio sorge invece spontaneo per la meccanica quantistica, dove le grandezze fisiche sono variabili aleatorie che si suppongono intrinseche. È questo il punto essenziale del concetto di entanglement, e va compreso bene.

Se ripetiamo l'esperimento nelle stesse condizioni, misurando il momento su una qualunque delle due particelle otteniamo ogni volta un valore casuale secondo una certa distribuzione; dopodiché, eseguendo la stessa misura sull'altra particella otteniamo sempre il valore opposto. In ogni singola esecuzione dell'esperimento, e non semplicemente su base statistica. Deve essere così per garantire il rispetto del principio di conservazione del momento, ma è naturale chiedersi quale sia esattamente il meccanismo che fa in modo che ciò avvenga.

Ci sono due possibili risposte:

- I valori misurati in realtà non sono casuali ma sono stati predeterminati durante la

preparazione dell'esperimento: la probabilità è epistemica come in fisica classica. Variabili non note fanno sì che a ogni esecuzione dell'esperimento si abbiano per ciascun momento valori diversi già all'origine, ma sempre deterministici e per le due particelle sempre uno l'opposto dell'altro perché il momento totale è nullo.

- I valori misurati sono genuinamente casuali, non sono preesistenti ma si manifestano solo all'atto della misura. Ma allora quando si misura il momento su una particella l'informazione circa il valore ottenuto deve in qualche maniera essere inviata all'altra, la quale in conseguenza modifica il proprio stato in maniera tale che eseguendo una misura si ottenga con certezza il valore di momento opposto.

Scopo dell'argomento di EPR è dimostrare che i valori misurati vengono predeterminati durante l'interazione delle due particelle. Ciò sarebbe in contraddizione con l'assunto che lo stato quantistico contiene tutte le informazioni sul sistema fisico, e dunque dimostrerebbe che in realtà la meccanica quantistica è incompleta.

L'argomento si sviluppa come segue.

Per una coppia di particelle nel suddetto stato entangled avviene, per quanto detto, che se misuriamo il momento sulla particella A e troviamo il valore p_A , allora non occorre affatto eseguire la misura sulla seconda particella, che avrà con certezza un valore di momento pari a $p_B = -p_A$. Per la particella B siamo dunque in grado di prevedere con esattezza (e non probabilisticamente) il valore del momento senza disturbare in alcun modo la particella B stessa, in quanto lo facciamo mediante una misura sulla particella A .

“Senza disturbare in alcun modo” vuol dire che escludiamo qualsiasi influenza che la misura eseguita sulla particella A possa avere sulla particella B . Si tratta del criterio di *località*, che del resto appare del tutto ragionevole: l'informazione si dovrebbe propagare da A a B istantaneamente o comunque, dato che la distanza tra le due particelle può essere resa grande a piacere, con velocità superiore a quella della luce. Un punto fondamentale su cui torneremo ancora.

Il medesimo stato entangled della coppia di particelle A e B può essere espresso in termini di posizione anziché in termini di momento. Si tratta sempre dello stesso stato in cui si trovano le due particelle prodotte dal decadimento, è importante rimarcarlo, ma esso si può equivalentemente definire dicendo che le due particelle A e B devono sempre trovarsi in posizione simmetrica rispetto al punto in cui è avvenuto il decadimento. Se misuriamo la posizione sulla particella A e troviamo il valore x_A , allora non occorre affatto eseguire la misura sulla seconda particella, che avrà con certezza un valore di posizione pari a $x_B = -x_A$. Per la particella B siamo dunque in grado di prevedere con esattezza il valore della posizione senza disturbare in alcun modo la particella B stessa, in quanto lo facciamo mediante una misura sulla particella A .

Poiché non ci può essere alcuna influenza da parte delle misure fatte su A , qualunque queste siano, i valori determinati di momento e posizione della particella B sono per

EPR dei cosiddetti “elementi di realtà”. Essi esistono cioè in quanto tali indipendentemente da ogni misura, sono proprietà effettivamente possedute dalla particella: una presa di posizione denominata *realismo*. Il loro valore deve essere allora stabilito da variabili che non conosciamo nell’intervallo di tempo in cui le particelle interagiscono. Allo stesso modo in cui il risultato del lancio di un dado è perfettamente determinato da variabili e valori iniziali che non conosciamo o su cui non abbiamo controllo. Allo stesso modo di come valori determinati di momento e posizione esistono per le due palline “emesse” dalla molla nel paragone classico che abbiamo fatto.

Il ragionamento fatto è inoltre evidentemente simmetrico, dato che si può ripetere scambiando i ruoli di *A* e *B*, e in ultima analisi non dipende da che cosa viene misurato e in quale ordine.

Dal punto di vista logico, va ribadito, è molto importante il fatto che EPR dimostrino la realtà di una *coppia* di grandezze che per la meccanica quantistica sono incompatibili; come già osservato sopra, una sola non basterebbe.

La conclusione di EPR è riassunta nella frase finale del celebre articolo del 1935:

Avendo così provato che la funzione d’onda [ossia il vettore di stato, *N.d.A*] non fornisce una descrizione completa della realtà fisica, lasciamo aperta la questione se una tale descrizione esista o meno. Crediamo, tuttavia, che una tale teoria sia possibile.

L’argomento di EPR dal punto di vista logico non fa una piega, e le sue conclusioni appaiono in effetti vicine al senso comune. Esso si basa però su un presupposto fondamentale, quello della località. La perfetta correlazione tra le misure aleatorie sulle due particelle può essere dovuta solo a ciò che è avvenuto quando esse erano insieme e interagivano oppure a una comunicazione istantanea e di natura sconosciuta tra di esse quando sono separate. Per l’artefice della teoria della relatività questa seconda possibilità non locale, questa *spooky action at a distance* (“inquietante azione a distanza”), come Einstein la chiamò, andava senz’altro esclusa per ragioni di principio.

Il fatto però è che non c’è alcun modo di verificare *sperimentalmente* le conclusioni di EPR così come questi autori le hanno formulate: un esperimento rileverebbe semplicemente la correlazione quantistica, ma non potrebbe escludere esplicitamente una non locale comunicazione istantanea a distanza tra le due particelle.

La versione di Bohm

L’argomento di EPR è stato formulato per delle grandezze continue, la posizione e il momento, le quali hanno un corrispondente classico e certamente sono immediatamente intuitive. Tuttavia, utilizzare invece delle grandezze discrete getta una luce nuova su tutta

la questione delle correlazioni quantistiche.

È questa l'idea che ebbe David Bohm, il quale nel 1952 riformulò l'argomento di EPR in termini di spin. La versione di Bohm rispetto all'originale è più semplice e articolabile, in termini matematici ma anche in termini discorsivi, e mette inoltre bene in evidenza le caratteristiche peculiari dello stato entangled.

Ma soprattutto, la formulazione dell'argomento di EPR elaborata da Bohm consente un salto in avanti decisivo, poiché apre la strada al teorema di Bell e dunque alla possibilità di verifica sperimentale dell'argomento stesso – e con essa alla condanna all'insuccesso del programma di Einstein di rendere deterministica la meccanica quantistica.

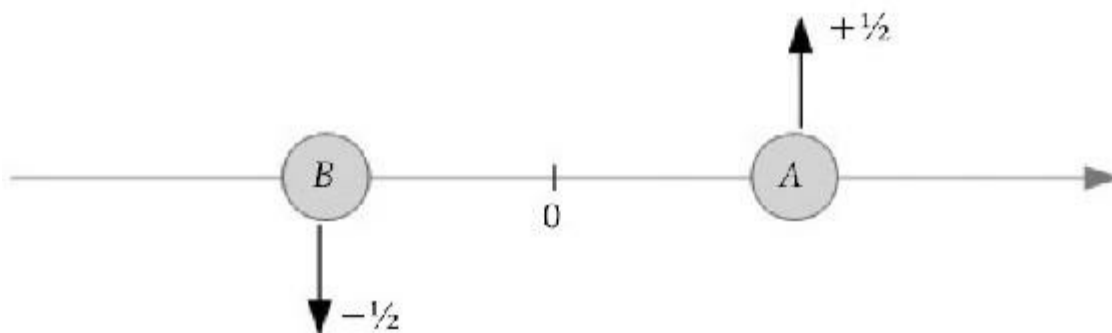


Figura 7.3 – L'esperimento mentale di EPR-Bohm.

Nell'argomento di EPR-Bohm (vedi [figura 7.3](#)) due particelle vengono preparate in uno stato tale per cui inizialmente la componente totale dello spin lungo una certa direzione z è nulla: se si trova che una delle due particelle ha spin S_{Az} lungo z pari a $+1/2$, allora l'altra particella ha con certezza spin S_{Bz} lungo z pari a $-1/2$. Si tratta di un particolare stato entangled chiamato “stato di singoletto”, che denotiamo con ψ_S . La correlazione tra i risultati delle misure di spin sulle due particelle è “cablata” all'interno di questo stato.

Le due particelle mostreranno ancora la stessa correlazione anche dopo che si dipartono. Ovviamente, fino a quando non si esegue una misura su una delle due particelle, poiché la misura “distrugge” lo stato entangled.

Da notare che due particelle si possono porre in uno stato entangled in vari modi, e le correlazioni che così si vengono a creare non sono necessariamente solo quelle corrispondenti a principi di conservazione. Gli stati di questo tipo hanno comunque tutti in comune il mantenimento di un “legame” iniziale.

Un'altra importante osservazione riguarda il fatto che naturalmente lo stato completo delle particelle ha anche una parte spaziale, che però non prendiamo in considerazione; facciamo un modello col solo spin perché è ciò che ci interessa.

Matematicamente ci sono due modi per ottenere lo spazio di Hilbert degli stati di un

sistema composto a partire da quelli dei sistemi componenti: la somma diretta e il prodotto tensore.

Il primo e più intuitivo è la *somma diretta*, ed è quello che è conforme ai risultati sperimentali della fisica classica. In meccanica classica lo stato di un punto materiale è rappresentato da sei parametri: tre componenti di posizione e tre di velocità nello spazio fisico tridimensionale. Lo stato del sistema fisico costituito da due punti materiali si ottiene allora molto semplicemente considerando insieme, in una coppia ordinata, gli stati dei due punti. I vettori di stato di partenza si scrivono uno sotto l'altro, ottenendo quindi uno stato descritto da dodici parametri.

Gli stati componenti convivono quindi come parti dello stato composto ma non si influenzano affatto a vicenda. In generale se gli stati componenti hanno rispettivamente n ed m parametri, lo stato composto ne ha $n + m$.

In tal modo il modello rappresenta il fatto fisico che in meccanica classica il tutto è dato dalla somma delle sue parti, il che a sua volta si conforma alla visione filosofica del *riduzionismo*.

Vuol dire anche che ciò che prendiamo in considerazione come “sistema” è di fatto una scelta arbitraria. Il sistema preso come oggetto di studio può essere ottenuto da parti che hanno una qualche relazione tra di loro, o anche no; dipende dall'utilità della cosa. Un possibile sistema composto è quello Terra-Luna, o Terra-Sole. Ma in linea di principio nessuno ci impedisce di prendere in considerazione un sistema fisico formato dalla Terra e dalle lune di Giove.

Per le due palline lanciate dalla molla in direzioni opposte, la conservazione del momento viene poi applicata a posteriori come condizione iniziale, e ci conduce a poter calcolare il moto di una sola pallina ottenendo anche quello dell'altra, in assenza di forze esterne. Questo è del tutto naturale, visto che la correlazione tra i momenti, e tra le posizioni, delle palline viene stabilita in fase di preparazione.

In meccanica quantistica tutto questo cambia radicalmente, dato che abbiamo a che fare con variabili aleatorie. Ci sono stati composti che non si ottengono semplicemente “considerando insieme” dei componenti che rimangono indipendenti tra di loro. Piuttosto, gli stati delle particelle componenti – e dunque le particelle stesse – sono interallacciati, “entangled” appunto.

Per poter rendere conto dei risultati sperimentali della meccanica quantistica occorre allora utilizzare il secondo metodo di composizione, il *prodotto tensore*, in cui gli stati componenti vengono moltiplicati in un modo opportuno (in modo tale che il prodotto stesso sia bilineare) per ottenere lo stato composto. Se i primi hanno rispettivamente n ed m parametri, il secondo ne ha $n \cdot m$. Questo di fatto costituisce ancora un assioma giustificato dall'aderenza tra teoria ed esperimento.

■ Lo stato di singoletto

Consideriamo l'autostato ψ_{A+z} dell'elettrone A e l'autostato ψ_{B-z} dell'elettrone B . Nel sistema composto essi danno origine mediante il prodotto tensore all'autostato

$$\psi_{A+z} \psi_{B-z}$$

in cui A ha con certezza il valore $+$ e B il valore $-$.

In maniera simile si ottiene l'autostato del sistema composto

$$\psi_{A-z} \psi_{B+z}$$

in cui al contrario A ha con certezza il valore $-$ e B il valore $+$. Questi due cosiddetti “stati prodotto” di per sé non sono entangled.

Lo stato entangled di singoletto può essere scritto come sovrapposizione di questi due autostati – che dunque interferiscono tra di loro, in questo modo:

$$\psi_s = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (\psi_{A+z} \psi_{B-z} - \psi_{A-z} \psi_{B+z})$$

dove compare a fattore il solito coefficiente di normalizzazione, e la fase relativa tra gli stati che vengono sovrapposti è pari a π , ossia è un semplice segno “ $-$ ”.

Essendo infatti l'insieme degli stati in meccanica quantistica – lo spazio di Hilbert – uno spazio lineare, si può essere sicuri che dati due stati come gli stati prodotto anche una loro sovrapposizione come ψ_s rappresenti uno stato del sistema fisica composto.

L'entanglement si verifica tra particelle qualunque, ma nel caso in esame una forma come ψ_s è anche necessaria per il motivo che le due particelle sono indistinguibili. Scrivendo esplicitamente la forma matematica di uno stato composto è impossibile non mettere delle etichette, come “ A ” e “ B ”; poiché però fisicamente le particelle non sono etichettabili, occorre fare in modo che la forma sia simmetrica rispetto agli indici.

In uno stato prodotto, come

$$\psi_{A+z} \psi_{B-z}$$

viene esplicitamente marcata con A la particella con “spin su” e con B la particella con “spin giù”, cosa che fisicamente è vera solo successivamente a una misura. La forma in cui abbiamo scritto lo stato di singoletto rispetta

invece il requisito posto e tiene dunque conto dell'indistinguibilità: scambiando gli indici A e B lo stato rimane lo stesso a meno di un ininfluente segno, e scambiando ancora torna identico a prima come deve essere.

Nel seguito, anche nei ragionamenti in forma discorsiva useremo le etichette “ A ” e “ B ” convenzionalmente, solo come una maniera per dire “una delle due particelle” e “l'altra particella”.

Si verifica che nello stato ψ_S i due possibili risultati di una misura di spin su una qualunque delle due particelle sono equiprobabili. Se il rivelatore A misura il valore $+$, lo stato di singoletto viene proiettato nell'autostato

$$\psi_{A+z} \psi_{B-z}$$

e di conseguenza il rivelatore B misurerà il valore $-$.

Invece se il rivelatore A misura il valore $-$, lo stato di singoletto viene proiettato nell'autostato

$$\psi_{A-z} \psi_{B+z}$$

e di conseguenza il rivelatore B misurerà il valore $+$.

La misura distrugge lo stato di singoletto: i due stati prodotto scritti sopra non interferiscono più tra di loro; in conseguenza della misura alle due particelle viene assegnato un preciso valore di spin ed esse inoltre vengono anche localizzate, visto che i due rivelatori sono macroscopici e dunque ben determinati spazialmente.

Se nell'espressione dello stato ψ_S sostituiamo z con x o con y , o in realtà con qualunque direzione r , otteniamo ancora lo stesso stato ψ_S : ciò riflette il fatto che in questo stato tutte le direzioni sono equivalenti; si dice allora che lo stato di singoletto è invariante per rotazione.

La grandezza discreta S_z , componente dello spin lungo la direzione z di una terna cartesiana, prende con Bohm il posto della grandezza continua momento p . Come abbiamo visto, le componenti dello spin lungo direzioni perpendicolari tra loro sono grandezze fisiche incompatibili. Allora per esempio la grandezza discreta S_x prende il posto della grandezza continua posizione x . Nell'argomento di EPR-Bohm abbiamo quindi una coppia di grandezze discrete incompatibili S_z e S_x , tali per cui:

- misurando ciascuna di esse su una delle due particelle A e B si ottiene uno dei due possibili valori $+$ e $-$ con uguale probabilità;
- l'altra particella avrà allora con certezza, per la stessa grandezza lungo la stessa

direzione, il valore opposto.

Tutto il ragionamento di EPR si ripete passo passo nella stessa maniera. E si perviene alla medesima conclusione: se si suppone che nessuna informazione si propaghi da una particella all'altra dopo che esse si separano, allora la perfetta correlazione tra la variabile aleatoria S_{Az} misurata sulla particella A e la variabile aleatoria S_{Bz} misurata sulla particella B si può spiegare solo ammettendo che i valori di S_{Az} e di S_{Bz} siano predeterminati da variabili nascoste durante la fase di preparazione in cui le due particelle si trovano insieme. E lo stesso ovviamente vale per S_x così come per S_y (e per qualunque altra componente).

Tutte le componenti dello spin di una particella sono allora elementi di realtà, in contrasto con le previsioni della meccanica quantistica. Anche qui, l'unica alternativa a questo è ammettere che ci sia una "comunicazione" tra le due particelle conseguente alla misura eseguita su una di esse.

Che ci possa essere una maniera sperimentale per stabilire quale delle due possibilità è quella giusta fu la grande intuizione di Bell, che lo condusse alla sua celebre disuguaglianza (si tratta in effetti di un teorema), pubblicata in un articolo del 1964.

La disuguaglianza di Bell

Presentiamo il geniale quanto semplice ragionamento di Bell, prendendo spunto da una delle formulazioni più chiare che siano state proposte. Bell si chiede che cosa succede se sulle due particelle eseguiamo misure di spin in direzioni *diverse*.

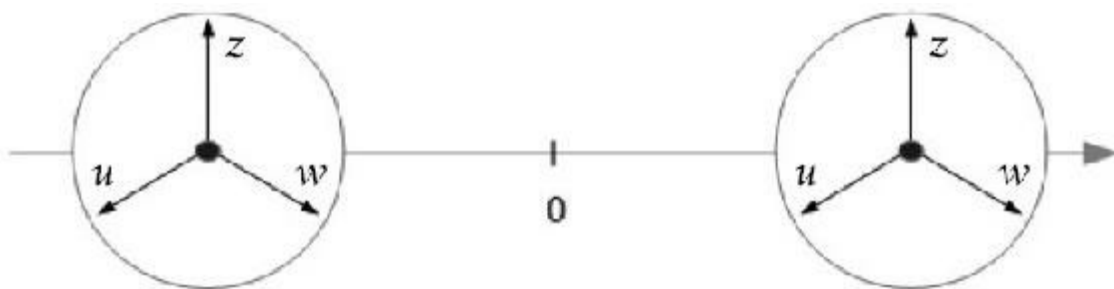


Figura 7.4 –L'esperimento mentale di Bell.

Come illustrato nella [figura 7.4](#), ciascuno dei due apparati di Stern-Gerlach può essere orientato secondo tre direzioni diverse:

- la direzione z ;
- la direzione u che forma un angolo di 120° con z ;

- la direzione w che forma un angolo di 240° con z .

Si assume che l'orientazione di ciascuno dei due apparati possa essere scelta a piacere e in maniera indipendente da quella dell'altro, e che la scelta possa essere fatta persino *dopo* che gli elettroni sono partiti dalla sorgente posta al centro.

Vediamo dapprima a quali previsioni si arriva ragionando esclusivamente in termini classici, ammettiamo cioè che i valori di spin delle due particelle siano stabiliti alla sorgente. Ognuna di loro possiede pertanto un'informazione già prestabilita, che dice quali valori di spin la particella mostrerà a seguito di una misura in una delle tre direzioni previste.

■ La previsione classica

Tutti i possibili insiemi di valori della componente di spin secondo nell'ordine z, u, w sono i seguenti:

$$(+++)(++-)(+-+)(-++)(+--)(-+-)(--+)(---)$$

otto diverse possibilità in tutto.

A ogni esecuzione dell'esperimento ciascuno dei due elettroni esce dalla sorgente con uno di questi otto insiemi di valori predeterminati. Sappiamo che è un fatto sperimentale che quando misuriamo lungo la *stessa* direzione, le due particelle devono presentare valori opposti. Le coppie di possibili insiemi di valori sono quindi le seguenti:

$$(a): (+++) (---)$$

$$(b): (++-) (--+)$$

$$(c): (+-+) (-+-)$$

$$(d): (-++) (+--)$$

Solo per comodità espositiva, denominiamo qui “programmi” queste quattro possibili coppie.

Facciamo allora il conto di quante volte i due elettroni avranno valori opposti quando li misuriamo non solo nella stessa direzione, ma secondo direzioni anche *diverse*. Per esempio, se il programma è (b) si trovano risultati opposti misurando le due particelle oltre che entrambe nella stessa direzione anche nelle coppie di direzioni (z,u) e (u,z) , mentre nelle coppie di direzioni (z,w) , (w,z) , (u,w) e (w,u) otterremo invece risultati coincidenti.

Lasciamo da parte per il momento il programma (a) ; per gli altri

programmi le coppie di direzioni che forniscono valori opposti sono riassunte nel seguente schema:

$$(b) \rightarrow (z,z); (u,u); (w,w); (z,u); (u,z)$$

$$(c) \rightarrow (z,z); (u,u); (w,w); (z,w); (w,z)$$

$$(d) \rightarrow (z,z); (u,u); (w,w); (u,w); (w,u)$$

Per contro, le coppie di direzioni che forniscono invece valori coincidenti della componente di spin sono le seguenti:

$$(b) \rightarrow (z,w); (w,z); (u,w); (w,u)$$

$$(c) \rightarrow (z,u); (u,z); (u,w); (w,u)$$

$$(d) \rightarrow (z,w); (w,z); (z,u); (u,z)$$

Tiriamo le somme: in totale con i tre programmi (b), (c) e (d) otteniamo risultati opposti in 15 casi su 27 totali e risultati coincidenti in 12 casi su 27 totali. La corrispondente probabilità (epistemica) P_{classica} è quindi 5/9 per risultati opposti e 4/9 per risultati coincidenti.

Ora, il programma (a) è particolare, in quanto nel caso in cui le particelle vengano prodotte dalla sorgente con questo programma i risultati delle due misure forniscono sempre valori opposti, per ogni combinazione di direzioni. Ciò vuol dire che includendo anche questo programma la probabilità di trovare valori opposti può solo aumentare, mentre la probabilità di trovare valori coincidenti può solo diminuire.

In conclusione la previsione classica è che la probabilità di trovare risultati coincidenti eseguendo misure sulle due particelle entangled lungo gli assi z , u , w scelti a caso deve rispettare la disuguaglianza

$$P_{\text{classica}}(\text{coincidenti}) \leq 4/9$$

e questa è la *disuguaglianza di Bell*. Essa pone un limite numerico superiore alla correlazione tra i valori ottenuti in misure sui due elettroni se vale l'ipotesi classica per la quale questi valori sono predeterminati da una causa comune presente nella preparazione iniziale. Bell la ottiene, mediante un procedimento matematico più elaborato, in una forma che ha validità più generale. È chiaro che per lo specifico esempio che stiamo considerando si può calcolare molto facilmente un valore numerico preciso per la probabilità tenendo nel conto tutti i programmi (a), (b), (c), (d), ma per uniformità con la formulazione generale lasciamo la condizione in forma di disuguaglianza.

Quello che è estremamente interessante è confrontare questa previsione classica con

quella quantistica.

■ La previsione quantistica

In meccanica quantistica si ha che per una delle due particelle, chiamiamola B , l'autostato "spin su" in direzione z , ψ_{B+z} , può essere espresso in funzione dei due autostati "spin su" ψ_{B+u} e "spin giù" ψ_{B-u} in direzione u in questo modo:

$$\psi_{B+z} = \frac{1}{2} \cdot \psi_{B+u} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \psi_{B-u}$$

Il ragionamento adesso è il seguente. Se eseguiamo una misura di spin in direzione z sulla particella A di una coppia di elettroni entangled e troviamo il risultato $-$, allora la particella A si porta nell'autostato ψ_{A-z} e la particella B si porta nell'autostato ψ_{B+z} , che è quello che abbiamo scritto sopra. Da esso, secondo la regola di Born si deduce quindi la distribuzione di probabilità (non epistemica):

- la probabilità di trovare $+$ misurando su B in direzione u (risultato opposto) è pari a

$$|\frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4}$$

- la probabilità di trovare $-$ misurando su B in direzione u (risultato coincidente) è pari a

$$|-\frac{\sqrt{3}}{2}|^2 = \frac{3}{4}$$

I passi fatti per la direzione u si possono ripetere nella stessa maniera per la direzione w . Tenendo conto che si può scrivere

$$\psi_{B+z} = -\frac{1}{2} \cdot \psi_{B+w} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \psi_{B-w}$$

si trova che:

- la probabilità di trovare $+$ misurando su B in direzione w (risultato opposto) è pari a

$$|-\frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4}$$

- la probabilità di trovare – misurando su B in direzione w (risultato coincidente) è pari a

$$|-\sqrt{\frac{3}{2}}|^2 = \frac{3}{4}$$

Siamo partiti dal risultato – in direzione z per la particella A ; evidentemente non occorre considerare anche il risultato +: per simmetria troveremmo le stesse probabilità per risultati opposti e per risultati coincidenti.

In totale vale quindi:

- la probabilità di trovare risultati opposti è: 1 (misura lungo z) più $\frac{1}{4}$ (misura lungo u) più $\frac{1}{4}$ (misura lungo w), diviso 3 (numero di direzioni lungo le quali si misura), uguale $\frac{1}{2}$;
- la probabilità di trovare risultati coincidenti è: 0 (misura lungo z) più $\frac{3}{4}$ (misura lungo u) più $\frac{3}{4}$ (misura lungo w), diviso 3 (numero di direzioni lungo le quali si misura), uguale $\frac{1}{2}$.

Dunque le previsioni quantistiche sono diverse dalle previsioni classiche. In particolare vale

$$P_{\text{quantistica}}(\text{coincidenti}) = \frac{1}{2} > \frac{4}{9}$$

per cui la previsione della meccanica quantistica viola la disuguaglianza di Bell!

Il punto importante di tutto questo è che avendo ora previsioni diverse possiamo verificare sperimentalmente quale delle due è giusta. Se eseguiamo un reale esperimento di questo tipo e misuriamo la probabilità di avere risultati coincidenti, avremo stabilito se la natura rispetta la disuguaglianza di Bell e quindi si comporta in maniera classica, oppure se la viola e dunque si comporta in maniera quantistica.

L'esperimento di Aspect

Un tale esperimento non era tecnicamente realizzabile all'epoca della pubblicazione dell'articolo di Bell. Ma per la prima volta nel 1982 un risultato sperimentale probante fu ottenuto all'Istituto di Ottica di Orsay vicino Parigi da Alain Aspect e dai suoi collaboratori Philippe Grangier, Gérard Roger e Jean Dalibard. Anziché elettroni, Aspect utilizzò una sorgente che emetteva coppie entangled di fotoni. I due rivelatori

erano posti a una distanza di 13 m tra di loro per escludere l'invio di segnali a velocità subluminali, e la loro orientazione poteva essere fissata dopo che i fotoni venissero emessi dalla sorgente.

L'esperimento di Aspect è una pietra miliare nella storia della fisica che ha una portata enorme per la nostra concezione filosofica del mondo, in questo paragonabile all'esperimento di Michelson e Morley del 1887 che confermò l'indipendenza della velocità della luce dal sistema di riferimento inerziale.

Il risultato inequivocabile di Aspect fu infatti la conferma della violazione della disuguaglianza di Bell e di conseguenza della previsione della meccanica quantistica.

Einstein dunque aveva torto: non ci possono essere variabili nascoste che rendano la probabilità quantistica solo epistemica, mantenendo la località. La correlazione quantistica tra le variabili aleatorie misurate sulle due particelle è più forte di quella dovuta alla presenza di una causa comune, come quella che esiste per le palline lanciate dalla molla, per la faccia del dado quando si ferma sul tavolo, o per i calzini del Dr. Bertlmann. Si tratta quindi proprio di una *spooky action at a distance* in cui tra le due particelle entangled sussiste una forma di legame che si stabilisce in maniera apparentemente istantanea.

L'esperimento di Aspect è stato ripetuto, migliorato ed esteso in vari modi dal 1982 a oggi, sempre con il medesimo risultato. Nel 1998, per esempio, fu introdotto da Weihs e collaboratori un meccanismo basato su un generatore di numeri casuali per cambiare l'orientazione dei rivelatori. Nel 2007 Ursin e collaboratori hanno eseguito una versione dell'esperimento in cui la distanza tra i rivelatori ammontava addirittura a 144 km: evidentemente la correlazione quantistica è del tutto indifferente alla distanza.

Un'altra affascinante frontiera è rappresentata dall'estensione del fenomeno dell'entanglement a sistemi di dimensioni sempre maggiori, cosa per nulla semplice per via del fenomeno della *decoerenza*, di cui torneremo a parlare, che in sistemi non elementari tende in maniera naturale a distruggere gli effetti quantistici. Nel 2014, in Spagna, è stato ottenuto uno stato di singoletto di spin non già tra due particelle ma tra mezzo milione di atomi di rubidio. Uno dei ricercatori sperimentali più attivi in questo campo, Anton Zeilinger, ha scritto:

Sarà interessante in futuro vedere sempre più esperimenti quantistici realizzati con oggetti sempre più grandi. Un altro sviluppo futuro molto promettente riguarda la realizzazione di entanglement di complessità crescente, tra un numero sempre maggiore di sistemi o di gradi di libertà di un sistema. Alla fine, tutti questi sviluppi spingeranno il reame della fisica quantistica ben all'interno del mondo macroscopico.

La passione di Shimony

Poiché l'esperimento di Aspect conferma che la correlazione quantistica è *non locale*, ci chiediamo esattamente con quale meccanismo avvenga la comunicazione tra le due particelle.

(Diamo qui solo degli accenni su argomenti relativistici, sufficienti per quello che ci serve; il lettore interessato trova ampi approfondimenti nel mio libro *Assoluto e relativo*, Hoepli 2015.)

È vero che il vettore di stato di per sé è solo uno strumento matematico, tuttavia la sua modifica comporta la modifica delle probabilità che da esso si deducono tramite la regola di Born, e queste hanno un senso fisico. Appare ovvio quindi che affinché la misura sulla particella *A* causi la riduzione del vettore di stato della particella *B* ci debba essere un segnale che trasferisca un'informazione da *A* a *B*.

Per quanto sappiamo, un *segnale* è sempre un processo fisico, mediante il quale viene trasmesso un effetto fisico da un punto *A* a un punto *B*. Il segnale porta un'informazione in forma di materia o energia, più in generale di grandezza fisica, la quale quando giunge in *B* è in grado di modificare lo stato fisico di un sistema posto in quel punto. Il segnale è il meccanismo che realizza il rapporto di causa ed effetto.

Se vogliamo cambiare lo stato di un interruttore posto in *B* (chiuderlo se è aperto e viceversa) possiamo inviare da *A* un oggetto materiale, una freccia o una pallina, che per mezzo della sua energia e momento agisca sulla leva dell'interruttore. Oppure il segnale potrebbe essere un'onda materiale, acustica per esempio, che all'arrivo eserciti la sua pressione per commutare l'interruttore; ancora, possiamo inviare un'onda elettromagnetica che in *B* faccia scattare un relè che inverte lo stato. Certamente possiamo anche inviare un biglietto o un sms a un amico che abita in *B*, o chiamarlo al telefono o urlare, pregandolo di spostare la leva dell'interruttore; anche questi segnali sono portati da un effetto fisico, ed è mediante un effetto fisico che il nostro amico sposta la leva. Possiamo alzare o abbassare una bandierina – intendendo interruttore aperto o interruttore chiuso: l'amico che ci guarda col binocolo riceve l'informazione portata dalla luce visibile e agisce di conseguenza.

Qualunque effetto fisico si trasmette con una determinata e misurabile velocità, che è sempre finita. Studiando il moto apparente di Io, uno dei satelliti galileiani di Giove, Ole Rømer fu in grado di stabilire per primo nel 1676 che l'oggetto fisico più veloce che si conosca, la luce, non si propaga istantaneamente bensì con velocità finita, di cui calcolò un valore abbastanza buono per quei tempi. La velocità nel vuoto delle onde elettromagnetiche, e quindi anche della luce, viene indicata con il simbolo *c* ed è pari approssimativamente a 300 mila chilometri al secondo. La luce impiega circa un secondo ad arrivare sulla Terra dalla Luna, otto minuti dal Sole, più di quattro anni da Proxima Centauri, la stella più vicina dopo il Sole (attorno alla quale, a proposito, ruota un pianeta potenzialmente abitabile: *Proxima b*, scoperto in agosto 2016).

Nella fisica newtoniana non c'è in linea di principio nessun limite alla velocità con cui un effetto fisico si può propagare – ma si sottintende che questa velocità rimanga

finita. La grande scoperta della teoria della relatività speciale fu invece che esiste un limite massimo invalicabile per la velocità dei segnali, ed è pari a c . Il suo valore inoltre non cambia passando da un sistema di riferimento inerziale a un altro; osservatori in moto rettilineo uniforme – ossia a velocità costante – uno rispetto all'altro misurano lo stesso valore c per la velocità limite (il che è del tutto controintuitivo).

Nessun segnale fisico in nessun sistema di riferimento può mai avere una velocità superluminale. Questo esclude che ci possa essere un segnale fatto di materia o energia che vada dalla particella A alla particella B nello stato entangled.

Ma potrebbe darsi che ci sia comunque un'azione causale di A su B non realizzata mediante un segnale fisico?

La relatività ha da dire molto sul concetto di causalità. L'esistenza di un limite superiore alla velocità degli effetti fisici infatti evidentemente impone la struttura causale del mondo.

Siano dati un evento A che avviene nel punto spaziale x_1 al tempo t_1 e un evento B che avviene nel punto spaziale x_2 al tempo successivo t_2 . Se

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} > c$$

allora non ci può essere una relazione di causa ed effetto tra A e B , perché fisicamente nessun segnale può essere abbastanza veloce da portare informazioni dal primo evento al secondo, neanche la luce. In tal caso i due eventi si dicono *non connessi causalmente*. Da notare che due eventi simultanei sono fuori connessione causale.

Se invece

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \leq c$$

allora i due eventi sono connessi causalmente, nel senso che uno può essere la causa dell'altro in quanto un segnale fisico può giungere da A a B .

A seguito di una misura la correlazione in uno stato entangled si stabilisce addirittura istantaneamente. Il fatto che il vettore di stato si modifichi istantaneamente nello stesso punto spaziale in cui avviene la misura non presenta alcun problema; ma per indurre un cambiamento istantaneo a distanza occorrerebbe che l'informazione si propaghi a velocità infinita.

E questo di per sé in realtà sarebbe in contraddizione anche con la fisica newtoniana. Era ben chiaro anche a Newton che un'azione a distanza istantanea ha piuttosto una

connotazione di magia, non si può pensare parte del mondo fisico. A differenza di quanto avviene nella teoria elettromagnetica (che Newton ovviamente non conosceva), la sua teoria della gravitazione è essenzialmente una teoria statica. Se in un'assegnata configurazione viene spostata o variata una massa non c'è alcun meccanismo per il quale questa perturbazione si propaghi con velocità finita: l'effetto della variazione secondo la teoria si ripercuote istantaneamente sulle altre masse, le quali sentono immediatamente una forza di attrazione diversa. Questa azione a distanza non soddisfaceva affatto Newton, il quale però semplicemente dovette ignorare la questione, visto che d'altra parte la teoria funzionava bene. Il problema viene risolto dalla teoria della gravitazione di Einstein (la relatività generale), nella quale una perturbazione, esattamente come avviene per il campo elettromagnetico, si propaga per onde con una velocità finita e pari a c : le onde gravitazionali.

Possiamo certamente ipotizzare che la velocità di trasmissione dell'informazione tra le particelle entangled non sia proprio infinita, ma dato che la distanza tra di esse può essere arbitrariamente grande, deve comunque essere superluminale. E per la teoria della relatività è la stessa cosa.

Nella teoria della relatività speciale il concetto di simultaneità subisce infatti una fondamentale revisione: la simultaneità non è assoluta come nella fisica newtoniana, bensì relativa. L'ordine temporale di una qualunque coppia A, B di eventi non connessi causalmente dipende dal sistema di riferimento. A seconda della velocità relativa, ci sono osservatori in moto inerziale per i quali A viene prima di B , altri per i quali B viene prima di A , e uno per il quale A e B sono simultanei. Invece l'ordine temporale per una coppia di eventi connessi causalmente è fissato e rimane lo stesso per ogni osservatore inerziale: la causa precede sempre l'effetto.

Se esistesse un'azione causale di A su B a velocità maggiore di c , per una classe di osservatori l'effetto verrebbe quindi a precedere la causa, e ciò distruggerebbe l'idea stessa di causalità e con essa la possibilità di una conoscenza scientifica. Oltre a ciò, in questa ipotesi sarebbe possibile inviare un'informazione nel passato; per cui si genererebbe tutta una serie di paradossi temporali. Il più celebre è il paradosso del nonno: io posso inviare a mio nonno centoventi anni fa un messaggio che fa sì che lui non abbia figli, dopodiché io non sono mai esistito.

Un'azione causale a velocità superluminale è dunque esclusa, comunque sia realizzata.

Eppure, quella che si verifica nella coppia entangled sembra proprio un'azione causale: la misura su A cambia lo stato in B in maniera drastica, una maniera del tutto equivalente a una misura. Ciò da una parte ha le conseguenze fisiche del caso, nel senso che la misura su B fornisce ora sempre lo stesso valore. D'altra parte, tuttavia, questa azione superluminale non può affatto essere usata per trasmettere un messaggio.

Il punto fondamentale è che il valore dello spin in A è una variabile non controllabile. Se lo sperimentatore potesse scegliere, mettiamo, il valore "+", avrebbe

effettivamente trasmesso a velocità maggiore di quella della luce il messaggio “–” che può essere letto in B , e viceversa. In pratica potrebbe alzare o abbassare una bandierina in B a velocità superluminale. Ma questo non si può fare. Lo sperimentatore non controlla la variabile, non può esercitare una scelta: eseguendo una misura in A il valore di spin che viene fuori è assolutamente casuale, e quindi assolutamente casuale sarà quello che trova uno sperimentatore in B , benché perfettamente correlato (la correlazione si può verificare solo a posteriori con mezzi classici e con comunicazioni a velocità normali). Nessun messaggio viene trasmesso, in effetti.

In questo senso la correlazione quantistica non è in realtà in contraddizione con la teoria della relatività – o quanto meno le due intrattengono una “pacifica convivenza” – ossia non si tratta di un’azione causale in senso stretto.

Ancora una volta abbiamo scoperto un comportamento peculiare, che non sappiamo classificare secondo gli schemi classici. Abner Shimony, in un suo articolo del 1984, scrisse pertanto in maniera simpatica che per la correlazione quantistica più di che “azione a distanza” (*action at a distance*) si dovrebbe parlare di “passione a distanza” (*passion at a distance*).

La non separabilità di Howard

Il fatto che nello stato entangled tutte le direzioni sono equivalenti ha una fondamentale conseguenza. Sappiamo che per uno stato di una particella da sola, in particolare per uno stato di spin, c’è sempre una direzione lungo la quale si ha certezza di ottenere uno dei due possibili valori – un elemento di realtà. Questa caratteristica si perde nello stato entangled, il che può essere interpretato in maniera *olistica* dicendo che le particelle componenti vengono a perdere le loro proprietà individuali che sono elementi di realtà. Non sarebbe però esatto dire che solo il sistema composto ha uno stato, e non le parti componenti. Lo stato della particella componente è deducibile dall’espressione matematica dello stato entangled, nonché dai risultati delle misure; si tratta appunto di uno stato in cui in tutte le direzioni i due possibili valori di spin sono equiprobabili. Ciò che è importante è che un tale stato invariante e quindi senza proprietà elementi di realtà non può essere realizzato per la particella da sola, ma solo quando questa è in uno stato entangled con un’altra. Ancora una volta, l’esatto opposto di ciò che EPR volevano dimostrare.

L’idea che il tutto non sia uguale alla somma delle sue parti ci conduce a un’altra maniera di interpretare la correlazione quantistica. Eliminata la causa comune, accanto alla comunicazione tra particelle c’è una terza possibilità.

Anziché vedere il fenomeno in termini di due entità separate tra le quali si realizza un’azione causale non locale, si può fare riferimento a un’entità unica, descritta dallo stato complessivo, che non è separabile nelle sue parti, almeno finché permane

l'entanglement, come accennato nel paragrafo *La versione di Bohm*.

La non località viene così spostata dall'azione – o passione – a distanza allo stato composto: si parla allora di *non separabilità*. Il concetto di separabilità come requisito fisico fondamentale era già stato proposto da Einstein nel 1948, e fu poi elaborato in relazione all'entanglement da Don Howard nel 1985 e in un altro articolo del 1989.

Pensiamo a un oggetto classico che ha due particelle agli estremi e che si estende su una distanza comunque grande. Tra le due particelle possono essercene altre in maniera continua, può esserci una forza, ovvero può non esserci nulla perché così è il sistema fisico che consideriamo. C'è una differenza concettuale enorme tra questo sistema esteso classico e quello quantistico non separabile, proprio perché il primo è fatto di parti mentre il secondo non è riducibile a ulteriori componenti.

Nei sistemi estesi a cui siamo abituati un'interazione o un'influenza di qualsiasi tipo deve comunque trasmettersi da una parte all'altra. L'entanglement produce invece un sistema esteso unico non fatto da parti, che si comporta istantaneamente allo stesso modo in ogni suo punto in risposta a un'azione causale esterna: un'idea inconcepibile dal punto di vista classico. È come se lo spazio su cui l'entità si estende non avesse significato, come non ne ha per una particella puntiforme.

Ancora un esempio. Il campo elettromagnetico – o qualsiasi altro campo classico, che si estende su una certa regione dello spazio, altro non è che l'insieme dei valori che ha in tutti i singoli punti di essa; se c'è una variazione in un punto, questa causa variazioni negli altri punti mediante un'azione causale interna portata da un'onda a velocità finita. Il sistema quantistico entangled sarebbe invece come un campo non costituito dai valori puntuali, una sorta di collezione di proprietà di un punto unico eppure estesa nello spazio, e che non ha differenze temporali al proprio interno proprio perché di fatto non c'è alcun "interno".

La non separabilità comporta pertanto una concezione completamente diversa della maniera in cui gli oggetti fisici sono immersi nello spazio e nel tempo. Il formalismo della meccanica quantistica, come abbiamo visto dall'espressione matematica dello stato di singoletto, è conforme a questo modo di vedere.

In realtà, dal punto di vista ontologico anche nella visione della non separabilità si deve certamente far riferimento a parti costituenti il tutto, benché si elimini la comunicazione tra queste: i due elettroni che formano la coppia entangled sicuramente esistono, perché sono gli "ingredienti" della preparazione e perché vengono rilevati dalla misura. Ma altrettanto sicuramente nell'entanglement lo stato delle parti è subordinato a quello del tutto in una maniera radicalmente nuova.

In questo senso l'olismo può essere considerato un aspetto del comportamento fondamentale della natura. Tuttavia sono del tutto da evitare le facili quanto infondate eststrapolazioni di cui spesso si legge. Non si può affermare per esempio che due oggetti una volta entrati in contatto rimangono poi con un misterioso legame "entangled" per sempre. Primo, perché l'entanglement è un fenomeno preciso che si verifica in

circostanze precise; secondo, perché una misura – ossia una particolare interazione di tipo macroscopico – distrugge lo stato entangled. Tanto meno è fondata l'idea che questa errata concezione di entanglement si estenda poi addirittura all'intero universo.

Capitolo 8

MISURA

L'ortodossia di Bohr

Il formalismo matematico della meccanica quantistica è certamente in grado di prevedere e spiegare tutti i fatti empirici in ambito quantistico. Tuttavia, a differenza di quanto avviene in fisica classica, gli enti matematici in questo formalismo non hanno un corrispettivo diretto negli enti fisici. I consolidati concetti derivati dall'esperienza del mondo macroscopico non possono essere applicati al mondo microscopico.

Un possibile atteggiamento potrebbe allora essere quello pragmatico-strumentalista, il limitarsi cioè alla considerazione dei soli eventi macroscopici, empiricamente osservabili direttamente con gli strumenti, senza porsi troppe domande sulla natura del sistema quantistico stesso: una “interpretazione minimale” che è in realtà evidentemente un'assenza di interpretazione. Abbiamo delle grandezze aleatorie non epistemiche e una teoria per ricavarne le distribuzioni di probabilità; parliamo quindi di un gran numero di sistemi uguali, ma non abbiamo niente da dire sul sistema singolo. Come affermò Bell, “essere” viene ridotto a “essere misurabile”.

Dal punto di vista strettamente scientifico questo è tutto ciò che possiamo affermare, per cui l'interpretazione minimale ha il pregio di rappresentare una base comune su cui certamente tutti concordano. Tuttavia non può essere soddisfacente limitarsi a questo approccio pragmatico – e sicuramente la maggior parte di coloro che si occupano di scienza, o che comunque hanno interesse per la conoscenza, vanno al di là. Il ruolo della fisica non può essere solo quello di correlare la preparazione dello stato iniziale con le distribuzioni di probabilità che troviamo sperimentalmente nello stato finale.

Ciò ci conduce allora con estrema naturalezza ad aggiungere delle riflessioni filosofiche – riflessioni che chiamiamo interpretazione – spesso supportate da estensioni del modello matematico della teoria. Per definizione, però, l'interpretazione non può essere verificata da un esperimento; non si può discernere per via sperimentale tra un'interpretazione e un'altra.

Come ricordava Dirac, certamente inquadrare la meccanica quantistica in una cornice concettuale esplicativa non è banale:

Il problema di ottenere un'interpretazione si dimostrò ben più difficile che non

semplicemente lavorare con le equazioni.

Non a caso, fin dall'inizio lo sviluppo sperimentale e teorico della meccanica quantistica è stato accompagnato dallo sviluppo di un'interpretazione. Quella che poi per lungo tempo – e tuttora oggi – è valsa come interpretazione standard se non addirittura come ortodossia: la cosiddetta *interpretazione di Copenhagen*, elaborata principalmente da Niels Bohr, Werner Heisenberg e Wolfgang Pauli. Molto spesso le presentazioni della teoria quantistica, a ogni livello, vengono tacitamente corredate dall'interpretazione di Copenhagen – o almeno dai suoi principali assunti – tanto che la seconda viene automaticamente considerata come parte della prima e talvolta ci si sorprende del fatto che ci possano essere altre interpretazioni. Anche nell'esposizione di questo libro alcuni suoi concetti sono già stati espressi, più o meno esplicitamente.

In realtà, per ragioni storiche e forse proprio perché si tratta della prima impostazione filosofica della nuova teoria, non è ben definito cosa si intenda esattamente per interpretazione di Copenhagen.

Ci sono oltretutto varie “correnti” e vari aspetti contrastanti. In ogni modo se ne possono evidenziare i punti fondamentali.

- Il vettore di stato descrive il singolo sistema fisico e non un insieme statistico – o come si dice, *ensemble* – di sistemi identici posti ciascuno nelle stesse condizioni sperimentali.
- Il vettore di stato fornisce un'informazione completa sul sistema fisico: non ci sono teorie più fondamentali della meccanica quantistica.
- L'apparato di misura va descritto in termini di fisica classica.
- La misura produce il collasso del vettore di stato; parlare di collasso d'altronde ha senso solo se si fa riferimento a un singolo sistema fisico.
- Le proprietà misurate vengono acquisite dal sistema all'atto della misura, non sono preesistenti; i microsistemi quantistici sono pertanto ontologicamente dipendenti dal processo di misura macroscopico.

Bohr basava la sua concezione sull'idea della *complementarità*, che il grande fisico danese espose per la prima volta durante il Congresso Internazionale dei Fisici tenuto nel settembre 1927 a Como per commemorare i 100 anni della morte di Alessandro Volta.

Fu questo congresso a dare avvio al grande dibattito sulla meccanica quantistica, dibattito che doveva proseguire il mese successivo con il celebre Congresso Solvay a Bruxelles. Tra i 61 partecipanti che si ritrovarono a Como c'erano: Bohr, Heisenberg, Pauli, Fermi, Marconi, Rasetti, Planck, Dirac, Born, Rutherford e Lorentz.



Figura 8.1 – Pauli, Heisenberg e Fermi sul lago di Como, 17 settembre 1927. *Fonte:* CERN Archive.

Bohr tuttavia non chiarì mai esattamente le linee di questa sua idea, per cui se ne possono estrarre solo i concetti generali.

Per Bohr la descrizione dei fenomeni fisici va fatta in termini di concetti – come onda e particella – che dal punto di vista classico sarebbero contrapposti ma che vanno invece visti come complementari. La complementarità è il nocciolo dei sorprendenti fenomeni che avvengono in ambito quantistico. È l'apparato sperimentale che determina quale aspetto tra quelli complementari viene preso in considerazione: il principio di indeterminazione altro non è che la maniera matematica di esprimere il limite posto alla possibilità di acquisire conoscenza su aspetti del mondo fisico che sono complementari.

L'interpretazione di Copenhagen sposta quindi l'attenzione dell'indagine scientifica dall'oggetto fisico all'apparato di misura progettato per acquisire conoscenza sull'oggetto stesso. Lo strumento viene ad assumere un ruolo centrale.

Questo comporta due tipi di conseguenze, due punti filosoficamente fondamentali che hanno prestato il fianco agli attacchi portati a questa interpretazione.

- Da una parte, la realtà oggettiva dei sistemi fisici viene in qualche modo messa in dubbio.
- Dall'altra parte, il ruolo centrale assegnato alla misura provoca la domanda: a quale livello esattamente nella catena di misura avviene il collasso del vettore di stato? In effetti il dualismo evoluzione-misura appare incomprensibile dato che un apparato di misura è comunque formato da molecole, atomi e particelle che sono sottoposte alle regole della meccanica quantistica.

Nel 1935 furono pubblicati due articoli da parte di due realisti convinti, i quali portavano i loro attacchi all'interpretazione di Copenhagen proprio in relazione a questi due punti filosofici.

Uno dei realisti era Albert Einstein, fiancheggiato da Podolski e da Rosen, ma abbiamo visto che il suo tentativo di dimostrare la realtà oggettiva delle proprietà

fisiche di un sistema quantistico fu poi stroncata da Bell e da Aspect. L'altro realista era Erwin Schrödinger.

Il gatto di Schrödinger

Se per Feynman l'“unico mistero” della meccanica quantistica è l'interferenza, per Schrödinger il tratto veramente distintivo della nuova teoria, quello che la pone al di là di ogni intuito, è proprio l'entanglement, termine del resto da lui stesso coniato. E questo particolare tratto può condurre a situazioni paradossali.

Nell'articolo del 1935 *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik* (“La situazione attuale della meccanica quantistica”) viene esposto il celeberrimo paradosso del gatto di Schrödinger, con il quale l'autore vuole quasi mettere in ridicolo la situazione che si viene a creare.

Lasciamolo descrivere allo stesso Schrödinger:

Si possono anche costruire dei casi del tutto burleschi. Un gatto viene chiuso in una scatola d'acciaio insieme alla seguente infernale macchina (a cui il gatto non deve avere accesso): in un contatore Geiger si trova una minuscola quantità di una sostanza radioattiva, così poca che nel corso di un'ora decade forse un solo atomo, o, con pari probabilità, nessuno; se il decadimento avviene il contatore scatta e aziona per mezzo di un relè un martelletto che rompe una fiala con del cianuro. Se si lascia indisturbato per un'ora questo sistema nel suo complesso, si potrà dire che il gatto è ancora vivo se nel frattempo nessun atomo è decaduto, mentre il primo decadimento avvenuto lo avrà avvelenato. La funzione ψ dell'intero sistema esprimerebbe questa situazione in una maniera tale che in essa il gatto vivo e il gatto morto sono mischiati o spalmati in parti uguali.

Qual è il punto dell'argomento del gatto di Schrödinger? Non c'è alcuna ragione perché il contatore Geiger non debba essere descritto in maniera quantistica al pari dell'atomo di sostanza radioattiva, e lo stesso può dirsi del relè, del martelletto, della fiala, del veleno, infine del gatto stesso. Perciò bisognerebbe descrivere il sistema complessivo come un sistema entangled formato dall'atomo e dal gatto. Al pari di quanto avviene per lo stato di singoletto di spin visto nel capitolo *Entanglement*, gli stati prodotto [atomo non decaduto] [gatto vivo] e [atomo decaduto] [gatto morto] sono sovrapposti con uguale probabilità; essi formano così uno stato entangled, nel quale gli stati delle parti componenti non sono più definibili in termini di proprietà. Allora l'atomo non è né decaduto né non decaduto e il gatto non è né morto né vivo finché non si esegue una misura.

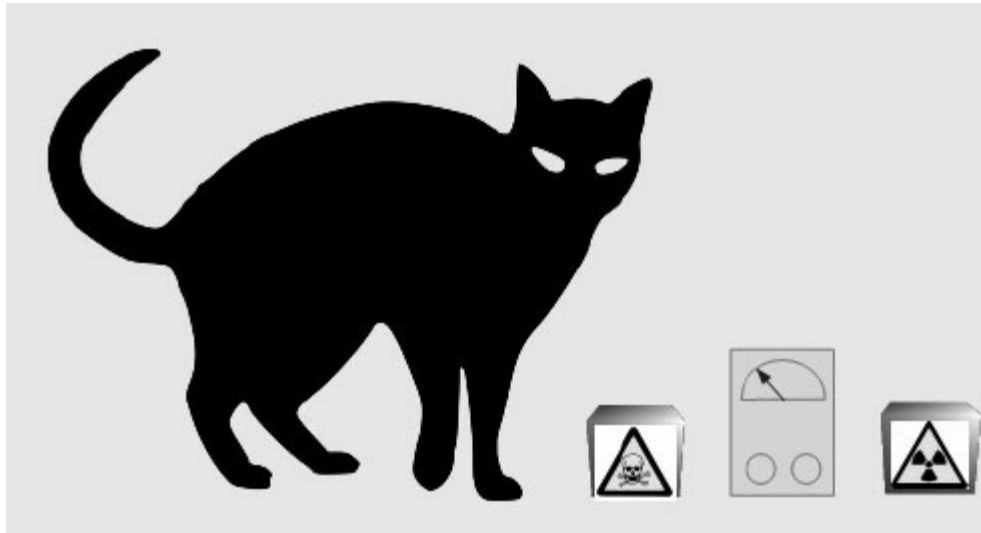


Figura 8.2 – Il gatto di Schrödinger.

Ora, ragiona Schrödinger, non abbiamo alcuna esperienza di stati sovrapposti nel mondo macroscopico: il gatto, sicuramente, è o vivo o morto, e questo indipendentemente da qualunque misura o osservazione. Per Schrödinger quindi, potendo – o dovendo – trattare in maniera quantistica anche gli oggetti macroscopici, si arriva a un paradosso. Il paradosso è conseguenza dell’ortodossia di Copenhagen (ossia della maniera standard di concepire la meccanica quantistica), la quale afferma che la sovrapposizione permane fino alla misura, senza tuttavia definire esattamente che cosa si intenda per quest’ultima a parte il considerarla un processo “anomalo”, del tutto diverso dall’evoluzione temporale lineare data dall’equazione di Schrödinger.

Bohr stesso in realtà a quanto pare pensava che il collasso debba avvenire già nel contatore Geiger, ma il problema concettuale posto da Schrödinger, in mancanza di una diversa e più precisa interpretazione del processo di misura, rimane.

L’amico di Wigner

Se la sovrapposizione permane anche per oggetti macroscopici, si potrebbe argomentare che certamente una “misura” avviene quando lo sperimentatore apre lo sportello della scatola metallica. A quel punto lo stato del gatto dalla precedente sovrapposizione collassa in uno dei due possibili valori: lo sperimentatore infatti deve trovarlo vivo *oppure* morto.

Il fisico Eugene Wigner propose nel 1961 un’estensione del ragionamento di Schrödinger, in cui però – a differenza di quest’ultimo – prendeva sul serio la possibilità della sovrapposizione e dell’entanglement quantistici per gli oggetti macroscopici.

Invece di eseguire lui stesso l’esperimento del gatto, Wigner immagina di incaricare un suo amico di farlo. L’amico apre la scatola e poi va a comunicare a Wigner se il gatto è vivo o morto. Ma allora anche l’amico potrebbe far parte di una sovrapposizione di

stati, e solo quando Wigner ottiene l'informazione il vettore di stato collassa in uno dei due possibili valori [gatto vivo] [amico felice] oppure [gatto morto] [amico triste].

Questa catena può andare avanti così all'infinito? No, risponde Wigner, perché ciò comporterebbe la sovrapposizione di due diversi stati di coscienza del suo amico – e di tutti gli altri esseri umani che successivamente si passano la notizia. Questo per Wigner non è concepibile, in quanto la coscienza non è qualcosa di materiale; gli stati mentali non sono stati fisici, e dunque per definizione non possono trovarsi in uno stato di sovrapposizione.

Wigner quindi – e questo era lo scopo della sua argomentazione – propone una soluzione precisa del problema della misura: è la coscienza dell'osservatore umano a far collassare il vettore di stato. È l'osservazione dell'amico di Wigner che proietta il gatto in uno stato di vivo oppure di morto; più in generale, un sistema fisico qualsivoglia è sempre in una sovrapposizione di stati quantistica fino a quando non interviene la coscienza umana. È l'osservazione umana a costituire la misura.

La tesi di Wigner presuppone evidentemente una concezione dualistica del rapporto tra mente e corpo, secondo la quale la mente è qualcosa di fondamentalmente diverso dal mondo materiale, ma che su questo può influire. Si tratta di una tesi dibattuta fin dall'antichità in molteplici contesti e in varie forme, del tutto indipendente dalla meccanica quantistica e che è di notevole interesse di per sé.

Ma per ciò che ci interessa qui il problema è che appare assolutamente anti-realista e antropocentrica l'idea di assegnare alla coscienza umana il ruolo di “creare” una realtà oggettiva a partire da un mondo di ombre fatto di indistinte sovrapposizioni e non di proprietà fisiche definite.

Una visione che sconfina in un puro idealismo, e che sebbene accettata da alcuni venne decisamente rigettata da molti altri. Come John Stewart Bell, che si chiese se l'intero universo abbia dovuto aspettare per assumere realtà fino a quando una specie di ominidi sulla Terra non acquisì un pensiero cosciente, o magari finché non comparve il primo fisico dotato di Ph.D.

O come Albert Einstein, per il quale “credere a un mondo esterno indipendente dal soggetto che lo percepisce è la base di tutte le scienze naturali”.

Abraham Pais, che era con Einstein a Princeton, scrisse:

Discutevamo spesso le sue idee sulla realtà oggettiva. Mi ricordo che durante una passeggiata Einstein improvvisamente si fermò, si girò verso di me e mi chiese se io veramente credessi che la Luna esiste solo quando la guardo.

Del resto, l'idea che nel processo di misura venga giocato un ruolo fondamentale dalla coscienza vorrebbe spiegare una cosa non ben compresa mediante un'altra compresa ancora peggio. Peraltro lo stesso Wigner abbandonò la sua tesi già nel 1970 in seguito all'articolo di Zeh sulla decoerenza.

Anche von Neumann argomentava già nel suo famoso libro del 1932 che il collasso del vettore di stato può essere posizionato in un qualunque anello della catena che va dall'apparato di misura fino alla percezione soggettiva; per questa ragione si parla talvolta di interpretazione di von Neumann-Wigner. Uno dei sostenitori moderni di questa interpretazione è Henry Stapp, che espone la sua visione sul ruolo fondamentale della coscienza nell'universo in un suo libro del 2007.

La decoerenza di Zeh

Il tentativo di risolvere il problema della misura tramite il concetto di decoerenza fu avviato da un lavoro seminale di Heinz-Dieter Zeh nel 1970 a Heidelberg, e ulteriormente elaborato poi negli anni '80 anche da Zureck, Joos, Kiefer e altri.

L'idea di Zeh prende lo spunto dalla seguente considerazione. L'entanglement tra il sistema quantistico da misurare e l'apparato di misura sarebbe realmente possibile nella teoria quantistica, ma si può mantenere solo nell'ipotesi che questo sistema complessivo sia *chiuso*, ovvero senza alcun interscambio, interazione o correlazione con l'esterno. E questa assunzione è errata.

Il sistema entangled costituito da un microsistema (particella) e da un macrosistema (apparato di misura) è infatti in realtà inevitabilmente *aperto*, dato che un apparato di misura macroscopico ha sempre interazioni di vario tipo con l'ambiente circostante: urti di molecole d'aria, luce incidente e così via. E questa continua e multiforme interazione nel caso in esame semplicemente non può essere trascurata, neanche in linea di principio.

Il sistema completo da studiare è perciò costituito da una particella, da un dispositivo di misura e da tutto l'ambiente circostante. Il modello matematico da impiegare per poterlo studiare è straordinariamente complicato, ma le conclusioni che se ne traggono sono estremamente interessanti.

Questa continua interazione con l'ambiente ha come effetto che gli stati prodotto tra particella e apparato di misura non sono più in grado di interferire tra di loro: lo stato entangled, ossia la loro sovrapposizione, viene pertanto distrutta.

Il meccanismo mediante il quale questo avviene si chiama *decoerenza*, e funziona nel modo seguente. Affinché due stati possano interferire tra di loro è necessario che tra di essi ci sia una relazione di fase fissa e costante nel tempo, ossia – come si dice – che essi siano coerenti tra di loro. L'effetto delle interazioni con l'ambiente è di distruggere questa coerenza, di eliminare cioè la relazione di fase costante.

L'eliminazione totale dell'interferenza è una situazione ideale; in realtà si verifica che i termini d'interferenza tra i due stati prodotto citati non spariscono completamente, bensì si annullano solo localmente. Il risultato è comunque che ciò spiegherebbe perché macroscopicamente non percepiamo sovrapposizioni quantistiche. In altre parole, la

decoerenza effettivamente sembra risolvere il problema del limite classico.

Il trilemma di Maudlin

Finora tutte le interpretazioni che abbiamo esaminato si concentrano sul collasso del vettore di stato, nel senso che considerano parte della teoria quantistica il processo non lineare che conduce al risultato di una misura, come contrapposto al processo lineare di evoluzione temporale. Ci possono essere approcci diversi da questo all'interpretazione della meccanica quantistica?

In un articolo del 1995, il filosofo della scienza Tim Maudlin ha proposto una formulazione piuttosto lucida del problema della misura. Maudlin elenca tre affermazioni interpretative sulla meccanica quantistica che dal punto di vista logico non possono essere tutte contemporaneamente vere; (almeno) una di esse deve essere falsa. Le tre affermazioni sono:

- a) La meccanica quantistica è completa: il vettore di stato contiene tutte le possibili informazioni sul sistema fisico cui si riferisce (postulato di completezza).
- b) Il vettore di stato è sottoposto esclusivamente a un'evoluzione temporale lineare, come quella dettata dall'equazione di Schrödinger (postulato di linearità).
- c) A seguito di una misura si ottiene sempre esattamente uno dei possibili valori della grandezza misurata (postulato della proiezione).

Quale dei tre postulati che formano il trilemma di Maudlin è falso? In questo consiste il problema della misura. E non c'è modo di stabilirlo – di risolvere cioè il problema – in maniera oggettiva. Si tratta allora semplicemente di una scelta soggettiva, scelta che non può essere confutata sperimentalmente: si tratta, appunto, di un'interpretazione.

L'interpretazione di Copenhagen, quella di Wigner e quella di Zeh fanno parte di una stessa categoria: esse negano tutte l'affermazione *b*).

Se allora:

- la meccanica quantistica è completa,
- non c'è solo la trasformazione del vettore di stato dovuta all'evoluzione temporale lineare,
- la misura fornisce sempre uno solo tra i possibili autovalori,

questo vuol dire che la misura provoca il collasso – non lineare e non deterministico – del vettore di stato. Le interpretazioni di questa categoria vengono pertanto denominate interpretazioni di collasso.

È possibile però concepire delle interpretazioni in cui *b*) invece è vera, secondo le quali cioè non esiste alcun collasso del vettore di stato; quelle appartenenti a questa categoria si chiamano perciò interpretazioni non di collasso. Si tratta di un approccio concettualmente molto diverso; per perseguirlo è necessario negare *a*) oppure negare *c*).

Alla categoria non di collasso appartengono due notissime interpretazioni, agli antipodi tra loro per più di una ragione. Vi faremo cenno nei prossimi due paragrafi.

L'onda pilota di Bohm

Sappiamo che negare il postulato di completezza *a*) era il chiodo fisso di Einstein e anche di Schrödinger. Il tentativo di EPR di dimostrare il carattere deterministico della meccanica quantistica ha però portato infine solo a dimostrarne il carattere non locale.

Un altro tentativo di recuperare il determinismo, e in particolare una ben definita traiettoria per le particelle, è quello già abbozzato da de Broglie e che è stato portato avanti da David Bohm nel 1952.

Bohm fa riferimento alla posizione, e prende pertanto in considerazione il vettore di stato in forma di funzione d'onda $\psi(x,t)$, che però considera una descrizione incompleta. Alla funzione d'onda Bohm aggiunge allora la posizione $x(t)$ della particella – o in generale di tutte le particelle che formano il sistema in esame – a ogni istante di tempo; ossia la traiettoria, che viene quindi considerata determinata.

Lo stato del sistema fisico è dato dalla *coppia* di funzioni:

$$\psi(x,t), x(t)$$

Così come la funzione d'onda $\psi(x,t)$ soddisfa all'equazione di Schrödinger, la traiettoria $x(t)$ nella teoria di Bohm soddisfa una seconda equazione differenziale lineare, la quale lega la variazione nel tempo di $x(t)$ alla variazione nello spazio della fase della $\psi(x,t)$.

In tal modo, la funzione d'onda non ha più un significato probabilistico ma viene interpretata come onda pilota, cioè come meccanismo in grado di pilotare la traiettoria della particella.

Le previsioni della teoria di Bohm non si discostano da quelle della meccanica quantistica standard; la differenza è che Bohm interpreta la posizione come determinata, anche se non nello stesso modo della meccanica classica. Nell'esperimento delle due fenditure, per esempio, la particella passa ogni volta da uno preciso dei due fori; ma l'onda pilota, che descrive di fatto l'ambiente fisico sperimentale, fa sì che essa venga guidata in maniera tale da andare mano a mano a formare il *pattern* d'interferenza sullo schermo di misura.

Quando si misura la posizione della particella, questa è già determinata dall'onda pilota, per cui non c'è necessità di postulare alcun collasso. La posizione assume un

ruolo privilegiato, ma dallo stato formato da funzione d'onda e posizione si possono comunque ricavare le altre grandezze fisiche – almeno in linea di principio.

La traiettoria nella sua interezza però rimane non rilevabile sperimentalmente, dato che predisporre una misura – per esempio presso una delle fenditure – modificherebbe ψ e dunque la traiettoria stessa. Inoltre, l'interpretazione dell'onda pilota rimane non locale, poiché la posizione di una particella in un punto all'istante t dipende dall'intera funzione d'onda e dunque dalla posizione delle altre particelle e dell'ambiente fisico nello *stesso* istante t .

Il multimondo di Everett

Nel 1956 Hugh Everett III discusse una dissertazione di dottorato in fisica a Princeton con John Archibald Wheeler, dal titolo *The Theory of the Universal Wavefunction* (“La teoria della funzione d'onda universale”), poi riassunta in un articolo del 1957.

Everett propose una singolare interpretazione della meccanica quantistica – da lui chiamata interpretazione a stati relativi – che nega il postulato c): all'atto della misura non si ottiene un solo preciso valore bensì *tutti* i valori possibili. Everett in realtà dopo Princeton andò a lavorare come analista al Pentagono e non si occupò più dell'argomento. Fu Bryce DeWitt che a partire dagli anni '60 riprese l'interpretazione e la divulgò parecchio, cambiandole anche il nome in *many-worlds* (multimondo).

Secondo questa interpretazione l'intero universo è descritto da un'unica funzione d'onda; ogni volta che si esegue una misura, anziché subire un collasso questa funzione d'onda e con essa l'intero universo si divide in tante parti quanti sono i possibili risultati. In ogni universo così prodotto vediamo solo un risultato, che ci appare casuale, e non abbiamo alcun sentore degli altri universi paralleli inaccessibili, in cui ci sono delle copie di noi stessi che rilevano le altre possibili alternative.

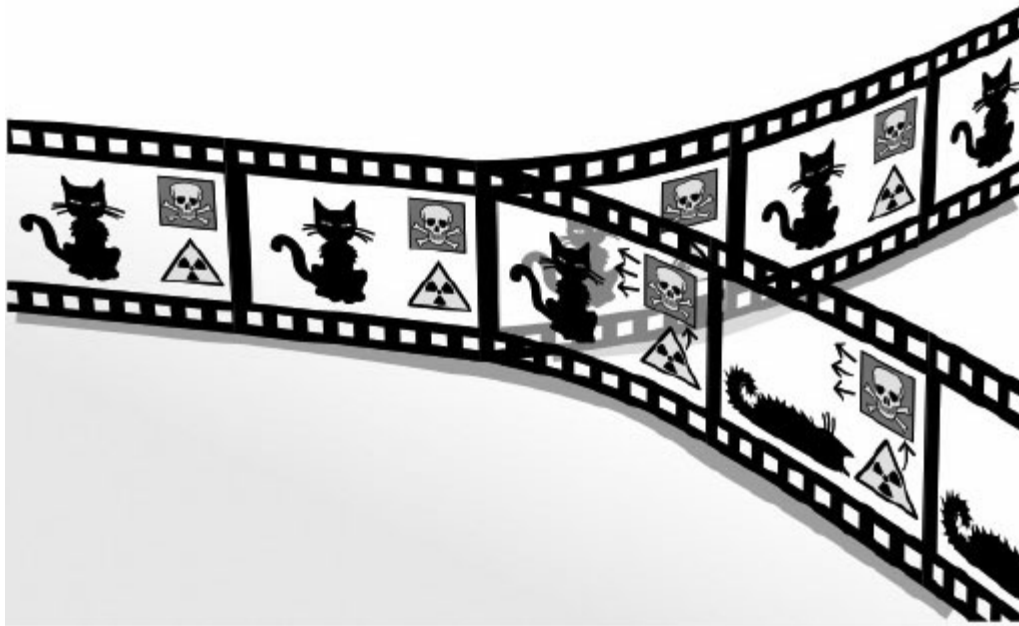


Figura 8.3 – L’universo subisce una biforcazione. *Fonte:* Wikimedia.

Esisterebbe dunque un numero incalcolabile di universi, perché dall’alba dei tempi per ognuna delle innumerevoli alternative, che da qualche parte si pongono, si verifica una biforcazione con la creazione di copie dell’universo. Per ogni universo in cui il gatto è vivo e l’osservatore è felice c’è un universo – altrimenti identico – in cui il gatto è morto e l’osservatore è triste.

L’idea di universi paralleli è estremamente suggestiva ed esercita un fascino irresistibile; un’idea che compare in varie forme speculative nella filosofia e nella letteratura – e non solo nella fantascienza. Io stesso ho sempre subito questo grande fascino. Il fascino delle alternative che non si sono verificate e che avrebbero cambiato il corso della storia, delle scelte che non abbiamo fatto e che avrebbero cambiato la nostra vita; il fascino del caso che avrebbe potuto dare luogo a un mondo diverso, mondo che magari in qualche modo non è perduto per sempre.

Nel racconto *Il giardino dei sentieri che si biforcano* – scritto nel 1941, ben prima di Everett – Jorge Luis Borges immagina un mondo di infinite possibilità contemporaneamente esistenti, un labirinto di biforcazioni temporali anziché spaziali, un libro che non ha mai fine. Il filosofo Gilles Deleuze osserva che la congiunzione dei mondi alternativi raccontata da Borges si contrappone alla disgiunzione degli stessi sostenuta invece da Leibniz. Per quest’ultimo Adamo potrebbe non aver peccato e Cesare potrebbe non aver passato il Rubicone; il mondo che una di queste scelte avrebbe generato è sì logicamente possibile, ma non è coesistente con il nostro: solamente uno di essi può passare dalla possibilità all’esistenza.

Borges illustra poi ancora magnificamente il realizzarsi di tutte le possibilità in un altro celebre racconto, *La biblioteca di Babele*. Nella Biblioteca ci sono tutti i possibili libri, in quanto generati da tutte le possibili sequenze – di un’assegnata lunghezza – di lettere dell’alfabeto; c’è quindi

Tutto: la storia minuziosa del futuro, l'autobiografia degli arcangeli, il fedele catalogo della Biblioteca, migliaia e migliaia di cataloghi falsi, la dimostrazione della falsità di quei cataloghi, la dimostrazione della falsità del catalogo vero, il vangelo gnostico di Basilide, il commento a questo vangelo, e il commento del commento, il resoconto veritiero della tua morte, la traduzione di ogni libro in tutte le lingue, le interpolazioni di ciascun libro in tutti gli altri, il trattato che Beda avrebbe potuto scrivere (ma non scrisse) sulla mitologia sassone, i libri perduti di Tacito.

Un tema dunque di straordinaria profondità. Tuttavia, io fatico a comprendere come invece l'interpretazione multimondo della meccanica quantistica possa essere seriamente presa in considerazione dal punto di vista *scientifico*. Se anche, come spesso si legge, essa rappresentasse una soluzione "elegante" al problema della misura, in compenso crea dal nulla una miriade di altri problemi – scientifici come filosofici – ben più pesanti di quello. Non viene più rispettato nessun principio di conservazione, intanto, né ci si cura del meccanismo che dovrebbe creare copie dell'universo, o della maniera in cui le varie copie possano convivere. Ipotizzare uno sconvolgimento di tale portata solo sulla base del problema della misura, senza nessun altro indizio e senza alcuna teoria fisica plausibile a sostegno né una maniera di ottenere una prova sperimentale, appare davvero un assunto piuttosto flebile.

I limiti del conoscibile

C'è un postulato che viene sempre tacitamente assunto e raramente contestato. Il postulato, cioè, che la natura sia comprensibile, conoscibile fin nelle sue minime sfaccettature, dato uno sviluppo intellettuale, scientifico e tecnologico sufficiente.

Ma non è detto che sia così. Forse, se da una parte la meccanica quantistica ci ha fatto capire che la natura a livello fondamentale è non deterministica e non locale, dall'altra parte ci ha fatto intravedere per la prima volta le frontiere del conoscibile, i contorni di un vasto reame al di là dei nostri sensi e della nostra ragione.

Un reame, quindi, precluso per sempre, o una fonte meravigliosa di nuova conoscenza, inaccessibile solo fino a che si trovi la giusta chiave?

Quello che è certo è che il "mistero" quantistico ci spinge a cercare ancora, con rinnovato vigore. Ci stimola ancora di più a perseguire profonde intuizioni, a costruire ardite teorie e a progettare ingegnosi esperimenti. Ci dà ancora maggiore motivazione per quella grandiosa sfida e avventura intellettuale che è la scienza.

Informazioni sul libro

All'inizio del XX secolo i fisici furono in grado di accostarsi per la prima volta al regno dell'estremamente piccolo, alla struttura ultima della materia e della radiazione. Quello che trovarono fu rivoluzionario e diede il via allo sviluppo di una nuova teoria fisica: la meccanica quantistica.

Ma di che cosa si tratta? Perché serviva una nuova teoria? E che cosa c'è di così strano? Il comportamento della natura a livello fondamentale è caratterizzato dalla casualità, alla quale sono indissolubilmente legate le altre sorprendenti caratteristiche, come la quantizzazione, la sovrapposizione di stati, l'indeterminazione e il fenomeno dell'*entanglement*, ossia la correlazione quantistica tra due particelle spazialmente separate che produce effetti non locali (il celebre "paradosso" di Einstein-Podolsky-Rosen).

Questo libro mostra come la meccanica quantistica sia un tema affascinante che può essere compreso da chiunque e che fa riflettere su concetti come esistenza e individualità e, in ultima analisi, sul significato stesso della realtà.

Circa l'autore

Giorgio Chinnici, fisico e ingegnere elettronico, si occupa di test e certificazione nel campo dell'energia elettrica. Alle passioni di sempre per gli scacchi e le lingue unisce quella, grandissima, per la divulgazione scientifica. Per Hoepli ha pubblicato: *Assoluto e relativo. La relatività da Galilei ad Einstein e oltre* (2015) e *Turing. L'Enigma di un genio* (2016).